



Perturbation de problèmes aux valeurs propres non linéaires et problèmes à frontière libre

Francis Conrad

► To cite this version:

Francis Conrad. Perturbation de problèmes aux valeurs propres non linéaires et problèmes à frontière libre. Mathématiques générales [math.GM]. Université Claude Bernard - Lyon I, 1986. Français. <tel-00830638>

HAL Id: tel-00830638

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00830638>

Submitted on 5 Jun 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée

devant l' UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON I

pour obtenir

le grade de DOCTEUR D'ETAT ES-SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Francis CONRAD

PERTURBATION DE PROBLEMES AUX VALEURS PROPRES NON LINEAIRES ET PROBLEMES A FRONTIERE LIBRE

Soutenue le 24 Juin 1983

JURY :	MM.	R. TEMAM .	Président
		C.M. BRAUNER	Rapporteur
		B. NICOLAENKO	Rapporteur
		J.B. BAILLON	
		J. BARANGER	
		L.A. CAFFARELLI	
		C. CARASSO	

THESE

présentée

devant l' UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON I

pour obtenir

le grade de DOCTEUR D'ETAT ES-SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Francis CONRAD

PERTURBATION DE PROBLEMES AUX VALEURS PROPRES NON LINEAIRES ET PROBLEMES A FRONTIERE LIBRE

Soutenue le 24 Juin 1983

JURY :	MM. R. TEMAM .	Président
	C.M. BRAUNER	Rapporteur
	B. NICOLAENKO	Rapporteur
	J.B. BAILLON	
	J. BARANGER	
	L.A. CAFFARELLI	
	C. CARASSO	

Président honoraire : M. le Professeur J. BOLDIN

Administrateur provisoire : M. le Professeur C. DUPUY

Administrateur provisoire adjoint : M. le Pr J. CHANEL

Administrateur provisoire adjoint : M. le Pr R. MORNEX

Secrétaire Général de l'Université : M. F. MARIANI

U.E.R. de Médecine GRANGE-BLANCHE	: M. le Pr Paul ZECH
U.E.R. de Médecine ALEXIS CARREL.....	: M. le Pr René MORNEX
U.E.R. de Médecine LYON NORD.....	: Mme le Pr PINET
U.E.R. de Médecine LYON SUD.....	: M. le Pr Jean NORMAND
U.E.R. de Faculté de Pharmacie.....	: M. le Pr C.A. BIZOLLON
U.E.R. de Techniques de Réadaptation.....	: M. le Pr EYSSETTE
U.E.R. de Biologie Humaine.....	: M. Jean-Pierre REVILLARD, MCA
U.E.R. E.P.S.....	: M. Albert MILLON, Pr d'E.P.S.
U.E.R. Faculté d'Odontologie de LYON.....	: M. le Pr Jean LABE
U.E.R. de Mathématiques.....	: M. René REDON, M.A.
U.E.R. de Physique	: M. le Pr Robert UZAN
U.E.R. de Chimie et Biochimie.....	: Mme Annick VARAGNAT, M.A.
U.E.R. des Sciences de la Nature.....	: M. le Pr ELMI
U.E.R. des Sciences Physiologiques.....	: M. le Pr J.F. WORBE
U.E.R. de Physique Nucléaire.....	: M. le Pr E. ELBAZ
I.U.T. I.....	: M. le Pr J. GIELLY
I.U.T. II.....	: M. le Pr P. MICHEL
Observatoire de Lyon.....	: M. TERZAN Agop, Astronome Adjoint
U.E.R. de Mécanique.....	: M. le Pr BATAILLE

CHAPITRE 0

PRESENTATION D'ENSEMBLE

DU TRAVAIL

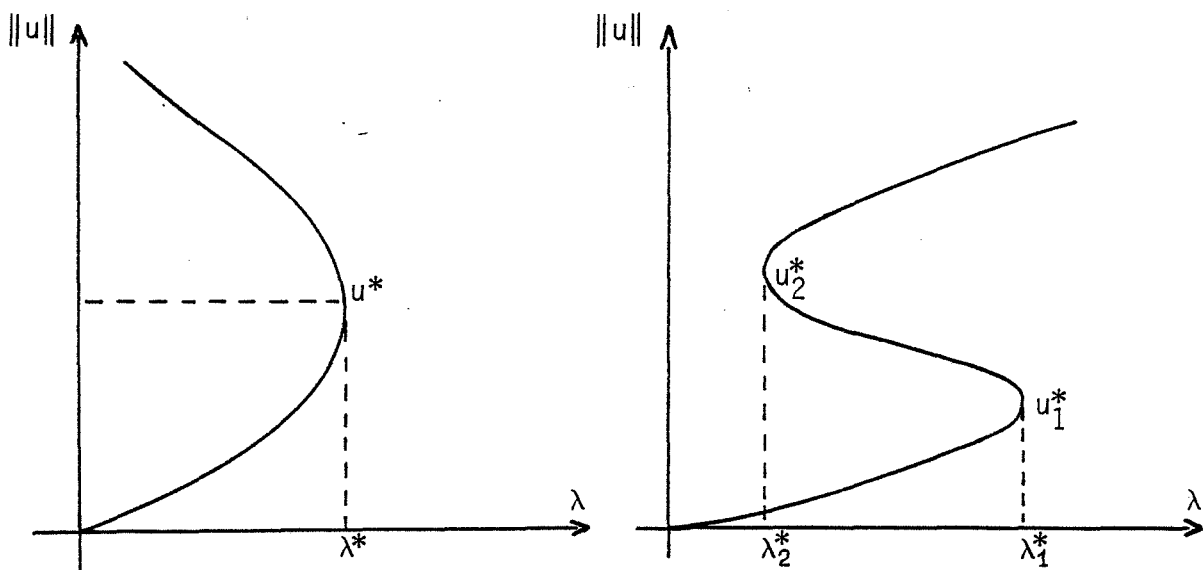
On se propose, dans ce travail composé de cinq parties, d'étudier quelques familles de problèmes aux valeurs propres elliptiques non linéaires de la forme :

$$(1)_\varepsilon \quad Au = f(\lambda, x, u, \varepsilon)$$

avec une condition aux limites homogène, A étant un opérateur elliptique du second ordre. Dans la non-linéarité f , continue selon u , figurent deux paramètres réels :

- . λ qui joue le rôle de paramètre de bifurcation
- . ε qui joue le rôle de paramètre de perturbation au voisinage de 0_+ (pour fixer les idées) .

On se place dans le cas forcé, i.e. $f(\lambda, x, 0, \varepsilon) \neq 0$, et on s'intéresse à la structure des branches de solutions de $(1)_\varepsilon$ et plus particulièrement à l'existence de points de retournement λ^*, u^* :



Deux types de situations vont en fait être considérés :

Le cas de perturbation régulière, où $f(\lambda, x, t, 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\lambda, x, t, \varepsilon)$ est une fonction régulière en t et où les solutions de $(1)_\varepsilon$ convergent vers les solutions de $Au = f(\lambda, x, u, 0)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. On s'intéressera à l'aspect perturbation de points de retournement.

Le cas singulier où $f(\lambda, x, t, 0)$ présente une (des) discontinuité (s) selon t , ce qui nous conduira à étudier des problèmes aux valeurs propres associés à des problèmes à frontière libre (P.F.L.) caractérisés en général par des inéquations variationnelles (I.V.) .

On trouvera, dans l'annexe ci-après, une liste des (classes de) problèmes traités dans chaque chapitre .

Passons rapidement en revue le contenu de chaque partie :

Dans le Chapitre I, on étudie un système non linéaire d'ordre deux qui représente une extension de modèles stationnaires considérés dans [57]. Un peu à part en ce qui concerne le thème général, ce chapitre introduit toutefois le modèle de base qui, sous diverses hypothèses simplificatrices, conduira aux problèmes types traités dans les chapitres suivants sous leur aspect multiplicité de solutions, points de retournement, convergences singulières.

Dans cette partie, on s'intéresse au couplage température-concentration (d'un substrat) modélisant un phénomène de diffusion avec réaction du substrat dans une membrane enzymatique, lorsque certains paramètres du modèle dépendent de la température. On établit l'existence de solutions au problème stationnaire, puis on examine quelques aspects numériques : méthodes de monotonie dans des cas particuliers et une méthode générale de contrôle optimal. Des essais sur un modèle physique permettent d'une part de juger de l'intérêt d'introduire des coefficients variables avec la température. D'autre part, pour certaines valeurs des constantes on met en évidence des phénomènes intéressants: frontières libres, comportement asymptotique.

Dans le chapitre II, on considère des problèmes de valeurs propres non linéaires de la forme :

$$Au = f(\lambda, x, u, \epsilon) \quad \text{dans } \Omega ; \quad Bu = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega ,$$

λ est un paramètre de bifurcation et f est une non-linéarité dépendant d'un paramètre de perturbation ϵ , telle que, pour $\epsilon = \epsilon_0$, on soit assuré d'avoir des points de retournement (dans le cas modèle, $A = -\Delta$, $f(\lambda, x, t, \epsilon) = \lambda \exp(\frac{t}{1+\epsilon t})$ et, pour $\epsilon = \epsilon_0 = 0$, $\exp(t)$ est une non-linéarité positive croissante, convexe).

On s'intéresse à la variation locale autour de ϵ_0 , des points de retournement du problème paramétré par ϵ .

On montre que si on a un retournement associé à une valeur propre simple du problème linéarisé pour ϵ_0 , il en est de même pour ϵ voisin de ϵ_0 .

On donne ensuite des formules exactes et quelques estimations pour la variation première des points de retournement $\lambda^*(\epsilon)$, $u^*(\epsilon)$ selon ϵ . Ces estimations sont importantes car en pratique les points de retournement définissent des transitions entre deux régimes. C'est par exemple ce qui se passe pour le problème modèle : $-\Delta u = \lambda \exp\left(\frac{u}{1+\epsilon u}\right)$, rencontré en combustion ou en cinétique enzymatique.

Un problème voisin a été abordé dans [68] où le "paramètre" était le domaine géométrique Ω .

On donne également une application des résultats au problème (inverse) de l'estimation de ϵ lorsque $\lambda^*(\epsilon)$ est connu, et un algorithme d'identification, testé sur quelques cas modèles.

Le Chapitre III est consacré à l'étude d'une équation de la forme : $Au = \lambda f(x, u, \epsilon)$ où, cette fois, $f(x, t, \epsilon) = \exp\left(\frac{t}{1-\epsilon t}\right)$ avec $\epsilon > 0$, singulière selon t , est une non-linéarité positive, croissante, convexe, sur l'ouvert $0 < t < \frac{1}{\epsilon}$. L'étude de tels problèmes a été abordée dans [12], [13], [67].

On s'intéresse à l'allure du diagramme des solutions positives $(\lambda, u(\lambda))$, l'objectif étant de comparer les résultats avec l'étude analytique [52] du problème de Guelfand correspondant à $\epsilon = 0$, pour lequel il n'y a plus de singularité.

Après avoir rappelé (avec quelques compléments) les résultats connus pour les problèmes $Au = \lambda \exp(u)$ et $Au = \lambda \exp\left(\frac{u}{1+\epsilon u}\right)$, $\epsilon > 0$, on étudie le problème $Au = \lambda \exp\left(\frac{u}{1-\epsilon u}\right)$, $\epsilon > 0$, du point de vue des branches de solutions, et en le comparant avec les modèles ci-dessus. Des essais numériques (tir ou méthode de continuation) dans le cas où le domaine est la boule unité de \mathbb{R}^n , complètent l'étude.

Pour $n = 1$, un calcul analytique assez complet décrivant la situation est possible. En conclusion, on note que le problème étudié se comporte sensiblement comme le problème de Guelfand, bien que les branches n'aient pas d'extension infinie : on est en présence de points d'arrêt.

Les conjectures issues de l'examen des résultats numériques sont exposées à la fin du chapitre.

Dans le Chapitre IV, on s'intéresse également à une classe de problèmes elliptiques de la forme : $Au = \lambda f(x, u, \epsilon)$, où $f(x, t, \epsilon) = \frac{\psi(x) - t}{\epsilon + |\psi(x) - t|} g(t)$ (g régulière) est, pour $\epsilon > 0$, une non-linéarité continue en t qui converge vers une fonction discontinue en t lorsque ϵ tend vers 0.

On étudie le comportement limite du problème lorsque ϵ tend vers 0, essentiellement du point de vue branches de solutions, multiplicité, retournements. A l'inverse de la démarche adoptée dans le Chapitre III, c'est le problème perturbé qui va donner des informations sur le problème limite.

Nous suivrons grosso-modo la méthode utilisée dans [15], [16] pour des problèmes à non-linéarités homographiques également issus de la cinétique enzymatique (mais ici g est typiquement une exponentielle dans le cas modèle).

On étudie d'abord la structure des solutions du problème perturbé ($\epsilon > 0$), puis on montre qu'à la limite, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, on obtient des solutions d'un problème à frontière libre à deux phases qui est étudié rapidement. Quelques exemples montrent l'évolution des phases en fonction du paramètre de bifurcation.

Lorsque $A\psi$ est ≥ 0 , le problème limite se réduit à une I.V. non-linéaire avec obstacle :

$$\begin{cases} \langle Au, v-u \rangle \geq \lambda(g(u), v-u) \\ \forall v \in K; u \in K = \{v \in H_0^1(\Omega) / v \leq \psi \text{ p.p. sur } \Omega\} \end{cases}$$

qui est traitée plus en détail, ainsi que le problème perturbé associé : existence de solutions maximale et minimale, convergence des branches lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, approximation numérique à l'aide du problème perturbé.

En conclusion, on étudie numériquement le problème modèle qui a servi de motivation à l'étude, en symétrie radiale. On note l'apparition de points de retournement sur les branches inéquation et on compare la structure des branches de solutions des problèmes limite (l'I.V.), et limite formelle (le problème de Guelfand), en fonction de la dimension n et de l'obstacle $\psi \equiv a$. Pour $n = 1$, on résout le problème analytiquement et pour $n = 2$, on obtient des informations par un calcul semi-analytique.

L'étude, essentiellement numérique du problème modèle limite :

$$\begin{cases} \langle Au, v-u \rangle \geq \lambda(e^u, v-u) \\ \forall v \in K; u \in K = \{v \in H_0^1(\Omega) / v \leq a \text{ sur } \Omega\} \end{cases}$$

faite au Chapitre IV a mis en évidence l'existence de points de retournement lorsque la frontière libre est non triviale. On est ainsi conduit à s'intéresser aux solutions multiples dans les I.V. et plus particulièrement aux points de retournement (ou de bifurcation), en essayant de les caractériser analytiquement : c'est en partie l'objet du Chapitre V. Il est en général facile d'établir l'existence globale de solutions. Nous cherchons ici, connaissant l'existence de branches de solutions, à définir les outils nécessaires à une étude locale, généralisant ce qui a été fait pour les équations (problème linéarisé de valeurs propres), et à les utiliser pour décrire le comportement local des branches, en particulier au voisinage d'un point "critique" (de retournement), étendant ainsi des résultats connus pour les équations [37]. L'intérêt pratique réside dans la possibilité de construire un algorithme numérique capable de franchir les points de retournement, c'est-à-dire de généraliser à certaines inéquations les méthodes maintenant standard de continuation [56].

On considère une classe d'inéquations de la forme :

$$\begin{cases} \langle Au, v-u \rangle \geq \lambda(F(u), v-u) \\ \forall v \in K; u \in K = \{v \in H_0^1(\Omega) / v \leq \psi \text{ p.p. sur } \Omega\} \end{cases}$$

pour lesquelles on a existence globale de solutions ≥ 0 pour $\lambda \geq 0$, ainsi que des estimations concernant l'ensemble de coïncidence, avec l'assurance que, pour λ assez grand on n'a plus de solutions de l'I.V. vérifiant l'équation $Au = \lambda F(u)$.

On définit d'abord les outils locaux pour l'étude des branches I.V. : pour une solution (λ^*, u^*) de l'I.V. on introduit, par un argument "géométrique", la notion d'I.V. conifiée homogène, ce qui conduit à la définition de point régulier ou singulier, puis, pour un point régulier, la notion de direction conique, solution d'une I.V. conifiée non homogène. On examine diverses situations et en particulier le cas d'un point situé à la transition entre une "branche équation" et une "branche I.V.". Tout ceci s'interprète

CHAPITRE II : Problème modèle (dans \mathbb{R}^n)

On prend $\lambda(\theta)$, $K_m(\theta)$, S , constants dans (1), on considère la deuxième équation : $\Delta\theta + \frac{\Delta H V_o}{\lambda (K_m + S_o)} e^{-\frac{E'}{R\theta}} = 0$ (toutes les constantes sont > 0) et on pose $\theta = \theta_o [1 + \varepsilon u]$, $\varepsilon = \frac{R\theta_o}{E'} > 0$

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda e^{\frac{u}{1+\varepsilon u}} = 0 \text{ dans } \Omega & \lambda \geq 0 \\ u = 0 \text{ au bord de } \Omega \end{cases}$$

La non-linéarité $f(t, \varepsilon) = e^{\frac{t}{1+\varepsilon t}}$ est une perturbation régulière (ponctuellement) de $f(t) = e^t$

CHAPITRE III : Problème modèle (dans \mathbb{R}^n)

On reprend le modèle du chapitre II mais avec ΔH et $E' < 0$ et on pose $\theta = \theta_o (1 - \varepsilon u)$ $\varepsilon = \frac{R\theta_o}{E'} > 0$:

$$(3) \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda e^{\frac{u}{1-\varepsilon u}} = 0 \text{ dans } \Omega & \lambda \geq 0 \\ u = 0 \text{ au bord de } \Omega \end{cases}$$

La non-linéarité $f(t) = e^{\frac{t}{1-\varepsilon t}}$ est non bornée lorsque $t \rightarrow \frac{1}{\varepsilon}$ ($t > 0$). On cherche des solutions vérifiant $0 < u < \frac{1}{\varepsilon}$.

CHAPITRE IV : Problème modèle (dans \mathbb{R}^n)

On reprend le modèle de base (1) avec D , λ , K_m constants, mais V_m et S non constants :

$$\left\{ \begin{array}{l} -D \Delta S + \frac{V_m(\theta) S}{K_m + |S|} = 0 \\ -\lambda \Delta \theta - \Delta H \frac{V_m(\theta) S}{K_m + |S|} = 0 \end{array} \right.$$

(conditions aux limites)

On peut découpler le système car $D\Delta HS + \lambda\theta = \text{constante}$

On élimine S dans la deuxième équation

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \theta + \mu \frac{\alpha - \theta}{\beta + |\alpha - \theta|} e^{-\frac{E'}{R\theta}} = 0 \\ \theta = \theta_0 \text{ au bord} \end{array} \right.$$

On pose enfin : $\theta = \theta_0 [1 + \delta u]$ $\delta = \frac{R \theta_0}{E'} > 0$ $\varepsilon = \frac{\beta}{\theta_0 \delta}$ $a = \frac{\alpha}{\delta \theta_0} - 1$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u + \lambda \frac{a-u}{\varepsilon + |a-u|} e^{\frac{u}{1+\delta u}} = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ au bord de } \Omega \end{array} \right. \quad \lambda \geq 0 \quad \varepsilon > 0$$

La non linéarité $f(t, \varepsilon) = \frac{a-t}{\varepsilon + |a-t|}$ converge vers une fonction discontinue en $t = a$ lorsque $\varepsilon \searrow 0$

CHAPITRE V : Problème modèle (formel)

On passe à la limite sur le modèle précédent lorsque $\varepsilon \searrow 0$ et on obtient un problème d'obstacle qui s'écrit formellement :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u + \lambda e^u \geq 0 \text{ dans } \Omega \\ u \leq a \text{ dans } \Omega \\ (a-u) (\Delta u + \lambda e^u) = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ au bord de } \Omega \end{array} \right.$$

- ANNEXE 2 -

●●●●●●●●

Quelques résultats utiles pour toute la suite

Dans cette partie on a rassemblé des théorèmes généraux concernant la structure des solutions d'une large classe de problèmes aux valeurs propres non linéaires dans un espace de Banach abstrait.

I. Un résultat d'existence globale

Soit E un espace de Banach réel, $\bar{E} = \mathbb{R} \times E$, $\bar{E}^{\pm} = \mathbb{R}_{\pm} \times E$. On considère des équations de la forme

$$(I.1) \quad u = T(\lambda, u)$$

où $T : \bar{E} \rightarrow E$ vérifie $T(0, u) \equiv 0$ (de sorte que $(0, 0)$ est solution de (I.1)) mais $T(\lambda, 0) \neq 0$ pour λ assez petit, $\lambda \neq 0$ (c'est le cas de non bifurcation par rapport à la branche $(\lambda, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, encore appelé cas forcé). Soit S l'ensemble des solutions de (I.1). Un continuum de S^{\pm} est une composante connexe de cet ensemble.

Théorème I.1 ([72]) : Si T est continu et compact, S contient deux continua S^{+} , S^{-} de \bar{E}^{+} , \bar{E}^{-} respectivement, rencontrant chacun $(0, 0)$ et ∞ .
(Si $T(\lambda, 0) = 0$ le résultat est vrai mais complètement trivial).

Corollaire I.1 ([72]) : Si les solutions de (I.1) sont bornées dans E indépendamment de λ , les projections sur \mathbb{R} de S^{+} et S^{-} sont \mathbb{R}_{+} et \mathbb{R}_{-} respectivement.

II. Structure locale des branches de solutions

X et Y étant deux espaces de Banach réels, on s'intéresse aux solutions $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times X$ de l'équation :

$$(II.1) \quad F(\lambda, x) = 0$$

où $F : \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ est régulière. Soit $(\bar{\lambda}, \bar{x})$ une solution de (II.1).

On cherche à décrire la structure de l'ensemble des solutions au voisinage de $(\bar{\lambda}, \bar{x})$.

Si $\bar{F}_x(\bar{\lambda}, \bar{x})$ est un isomorphisme de X sur Y la réponse est fournie par le théorème des fonctions implicites : les solutions de (II.1) autour de $(\bar{\lambda}, \bar{x})$ forment un arc $(\lambda, x(\lambda))$ et $x(\lambda)$ a la régularité de F .

Lorsque $\bar{F}_x(\bar{\lambda}, \bar{x})$ est singulier, la paramétrisation par λ n'est plus possible mais, sous certaines hypothèses, on a encore un arc régulier au voisinage de $(\bar{\lambda}, \bar{x})$:

Théorème II.1 ([37]) : soit $(\bar{\lambda}, \bar{x})$ une solution de (II.1) et F continûment différentiable d'un voisinage de $(\bar{\lambda}, \bar{x})$ dans Y . On suppose que le noyau de $F_x(\bar{\lambda}, \bar{x})$ est de dimension 1, engendré par x_0 , que l'image de $F_x(\bar{\lambda}, \bar{x})$ est de codimension 1 et que $F_\lambda(\bar{\lambda}, \bar{x}) \notin I_m(F_x(\bar{\lambda}, \bar{x}))$. Si Z désigne un supplémentaire de $\text{Ker } F_x(\bar{\lambda}, \bar{x})$ dans X , les solutions de (II.1) au voisinage de $(\bar{\lambda}, \bar{x})$ forment une courbe $(\lambda(s), x(s))$ paramétrée par $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$:

$$\lambda(s) = \bar{\lambda} + \tau(s) ; x(s) = \bar{x} + s x_0 + s z(s) \text{ où}$$

$s \rightarrow (\tau(s), z(s)) \in \mathbb{R} \times Z$ est une fonction de classe C^1 au voisinage de $s = 0$ et $\tau(0) = \tau'(0) = 0 ; z(0) = z'(0) = 0$.

Si F a la régularité C^k , il en est de même des fonctions τ et z .

Une situation classique où le théorème (II.1) est susceptible d'être utilisé est la suivante :

Soit $F : \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ de classe C^1 , $F(0,0) = 0$, $F_x(0,0)$ étant un isomorphisme de X sur Y . Par le théorème des fonctions implicites il existe une courbe de classe C^1 , $x(\lambda)$, telle que $(\lambda, x(\lambda))$ représente les solutions de (II.1) au voisinage de $(0,0)$.

Soit $\bar{\lambda} \leq +\infty$ le nombre maximal vis à vis de l'existence d'une fonction continue $x : [0, \bar{\lambda}[\rightarrow X$ telle que $(\lambda, x(\lambda))$ soit solution de (II.1) avec $F_x(\lambda, x(\lambda))$ régulier pour $\lambda < \bar{\lambda}$.

Faisons les hypothèses supplémentaires suivantes :

- . $\bar{\lambda} < +\infty$
- . les ensembles bornés de $F^{-1}(0)$ sont précompacts dans $\mathbb{R} \times X$
- . $\liminf_{\lambda \nearrow \bar{\lambda}} \|x(\lambda)\| < \infty$

Alors il existe $\bar{x} \in X$ tel que $(\bar{\lambda}, \bar{x})$ vérifie (II.1), $\bar{x} = \lim x(\lambda_n)$ pour une suite $\lambda_n \nearrow \bar{\lambda}$ et, vu la maximalité de $\bar{\lambda}$, $F_x(\bar{\lambda}, \bar{x})$ est singulier.

Un exemple d'une telle situation où les hypothèses complémentaires du théorème II.1 sont vérifiées est le suivant :

III. Application à une classe de problèmes aux limites elliptiques

On considère le problème de Dirichlet suivant :

$$(III.1) \quad \begin{cases} Au = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + c(x)u = \lambda f(x, u(x)) & \text{si } x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Ω est un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^n , A un opérateur uniformément elliptique de coefficients $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^2(\bar{\Omega})$, $c(x) \geq 0$ $c(x) \in C^1(\bar{\Omega})$.

La non-linéarité $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^3 et vérifie :

- . $f(x,0) > 0 \quad x \in \bar{\Omega}$
- . $f_t(x,0) > 0 \quad x \in \bar{\Omega}$
- . $f_{tt}(x,t) > 0 \quad x \in \Omega, t > 0$

On s'intéresse aux solutions $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times C^2(\bar{\Omega})$, $\lambda \geq 0$ donc $u \geq 0$.
Le théorème (I.1) s'applique et donne, dans $\mathbb{R}_+ \times C^2(\bar{\Omega})$ l'existence d'une composante non bornée contenant $(0,0)$.

En ce qui concerne l'aspect local, on a les résultats suivants :

Soit $\mu_1 < +\infty$ la valeur propre fondamentale du problème :

$$\begin{cases} A v = \mu f_t(x,0) v_0 & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (v_0 > 0 \text{ sur } \Omega)$$

Théorème III.1 ([38]) :

- (i) Si (λ, u) est une solution de (III.1) alors $\lambda \leq \mu_1$
- (ii) il existe $\bar{\lambda} \leq \mu_1$ maximal vis à vis de l'existence d'une branche $(\lambda, u(\lambda))$, $\lambda < \bar{\lambda}$, de solutions positives de (III.1) vérifiant :

- . $\lambda \in [0, \bar{\lambda}) \rightarrow u(\lambda) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ est continu $\forall \alpha \in (0,1)$
- . l'opérateur $v \in C_0^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow A v - \lambda f_t(x, u(\lambda)) v \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ est inversible pour $\lambda < \bar{\lambda}$.
- . $\lambda \rightarrow u(\lambda)(x)$ est croissante pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et $u(\lambda)$ est pour tout λ fixé $< \bar{\lambda}$, la solution minimale de (III.1).

Le théorème (II.1) s'applique intégralement, avec les particularités suivantes :

Théorème III.2 ([38]): on suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\|u(\lambda)\|_{C(\bar{\Omega})} \leq M$ pour tout $\lambda < \bar{\lambda}$. Alors $\bar{u} = \lim_{\lambda \nearrow \bar{\lambda}} u(\lambda)$ existe dans $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \quad \forall \alpha \in (0,1)$, $(\bar{\lambda}, \bar{u})$ est une solution de (III.1) et il existe $\varepsilon > 0$ tel que les solutions de (III.1) au voisinage de $(\bar{\lambda}, \bar{u})$ forment une courbe $(\lambda(s), u(s)) \quad s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ vérifiant :

- $s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \lambda(s), u(s) \in \mathbb{R} \times C_0^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ est de classe C^2
- $\lambda(0) = \bar{\lambda} ; \lambda'(0) = 0 ; u(0) = \bar{u} ; u'(0) = v$ où $v(x) > 0$ est la fonction propre principale de l'opérateur dérivé :

$$\begin{cases} A v = \bar{\lambda} f_t(x, \bar{u}(x))v & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- $\lambda''(0) < 0$

La dernière condition implique que, pour $\lambda < \bar{\lambda}$, λ voisin de $\bar{\lambda}$, (III.1) admet localement deux solutions distinctes, pour $\lambda = \bar{\lambda}$ une seule solution $u = \bar{u}$, pour $\lambda > \bar{\lambda}$, pas de solution (toujours localement) : ce sont les conditions qui définissent $(\bar{\lambda}, \bar{u})$ comme un point de retournement de (III.1).

CHAPITRE I

SUR UN MODELE D'EQUATIONS COUPLEES EN
DIFFUSION-REACTION NON LINEAIRE

S O M M A I R E

I.- INTRODUCTION

II.- HYPOTHESES ET NOTATIONS

III.- RESULTATS D'EXISTENCE

- III-1 Le cas exothermique ($G \leq 0$)
- III-2 Le cas endothermique ($G \geq 0$)
- III-3 Le cas dégénéré
- III-4 Application au problème physique

IV.- EXISTENCE PAR DES METHODES CONSTRUCTIVES DANS DES CAS PARTICULIERS

- IV-1 Problème quasi-linéaire avec hypothèses de monotonie
- IV-2 Problème quasi-linéaire sans hypothèse de monotonie
- IV-3 Le problème physique en dimension 1

V.- ETUDE NUMERIQUE DU PROBLEME PHYSIQUE

(en collaboration avec C. LAINÉ)

- V-1 Une méthode générale de contrôle optimal
- V-2 Mise en oeuvre sur le système couplé
- V-3 Résultats numériques sur le problème physique.

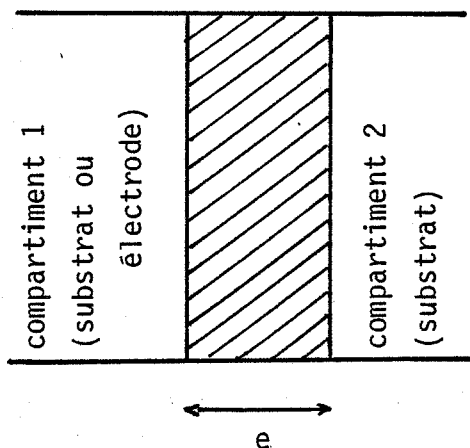
I.- INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré à l'étude du couplage température-concentration modélisant un phénomène de diffusion avec réaction d'un substrat dans une membrane enzymatique, lorsque certains paramètres du modèle dépendent de la température. Des résultats d'existence seront d'abord donnés pour un système généralisant le problème physique, avec plusieurs jeux d'hypothèses sur les données. On reviendra ensuite au modèle physique pour le traitement numérique par une méthode de contrôle optimal bien adaptée à la nature non linéaire du problème considéré. On fera dans ce cas la comparaison avec le modèle à coefficients constants, ainsi que l'étude (numérique) asymptotique suivant certains coefficients, mettant en évidence des problèmes à frontière libre.

Décrivons rapidement le modèle physique :

Le cadre est plus général que celui considéré par J.P. Kernevez et D. Thomas ([58]) dans certains de leurs modèles : les paramètres mis en jeu

sont ici des fonctions de la température. Rappelons très brièvement l'origine du problème : soit une membrane que nous supposons plane, d'épaisseur e (si le compartiment 1 représente électrode, la membrane peut être sphérique) dans laquelle on a greffé une enzyme; la membrane sépare deux compartiments contenant



un substrat S (ou est accolée à une électrode plongée dans un substrat S)

qui diffuse dans la membrane et donne par réaction un produit P.

Des hypothèses classiques ([74]) donnent, pour l'expression de la vitesse de la réaction, le terme $\frac{V_m S}{K_m + S}$ (lois de Michaelis et Menten), où S est la concentration du substrat, V_m la vitesse maximale de la réaction, fonction de la concentration en enzyme et K_m un paramètre fonction des constantes cinétiques de la réaction. Les concentrations du substrat dans les compartiments sont supposés constantes au cours du temps.

Si D, λ désignent respectivement les coefficients de diffusion matière et thermique dans la membrane, la combinaison des lois de la diffusion avec un bilan (matière et thermique) conduit au modèle suivant :

$$(I-1) \left\{ \begin{array}{ll} - \frac{d}{dx} \left[D \frac{dS}{dx} \right] + \frac{V_m S}{K_m + S} = 0 & 0 < x < e \\ - \frac{d}{dx} \left[D \frac{dP}{dx} \right] - \frac{V_m S}{K_m + S} = 0 & 0 < x < e \\ - \frac{d}{dx} \left[\lambda \frac{d\theta}{dx} \right] - \Delta H \frac{V_m S}{K_m + S} = 0 & 0 < x < e \\ S(0) = S(e) = S_0 \\ P(0) = P(e) = 0 \\ \theta(0) = \theta(e) = \theta_0 \end{array} \right.$$

Lorsque la membrane est accolée à l'électrode, on considère une condition de Neumann en $x = 0$ (ce qui revient à doubler l'épaisseur de la membrane dans le problème de Dirichlet et à considérer des solutions symétriques).

On notera que S + P vérifie une équation de diffusion linéaire qui donne P une fois S et θ connus, de sorte qu'il est inutile de prendre en compte l'équation donnant P.

Dans les équations (I-1), ΔH désigne l'enthalpie de la réaction.

Ce modèle a été étudié tant du point de vue mathématique que numérique dans [9],[57],[58], lorsque tous les paramètres introduits dans le système sont constants, ce qui est justifié dans un certain nombre de cas. Toutefois, si l'on considère par exemple, la décomposition de l'eau oxygénée concentrée en présence de catalase ([7]), il arrive que la température au coeur de la membrane augmente de manière importante, de sorte que l'hypothèse des coefficients constants est incorrecte.

Le but de ce travail est d'étudier le modèle ci-dessus dans l'hypothèse de coefficients variables avec la température. Plus précisément :

On suppose que D , λ , V_m , K_m dépendent de la température, les autres coefficients étant constants (c'est-à-dire en pratique à variation plus lente selon θ).

Pour D , V_m , K_m on connaît leur expression théorique :

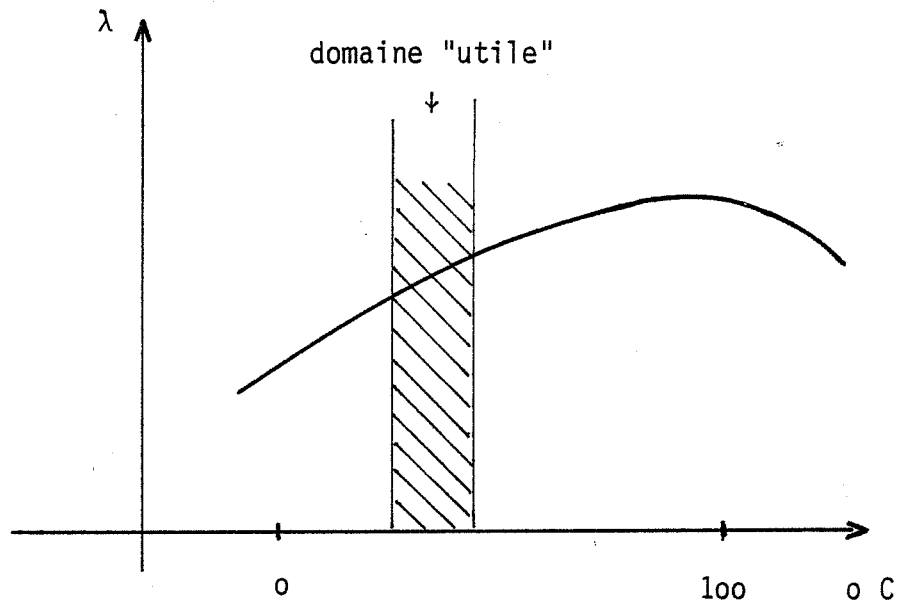
$$D = D_0 e^{-\frac{E}{R\theta}} \quad (\text{loi d'Arrhénius}) \text{ avec } D_0, E > 0$$

$$V_m = V_0 e^{-\frac{E'}{R\theta}} \quad (\text{loi d'Arrhénius}) \text{ avec } V_0, E' > 0$$

$$K_m = K_0 e^{-\frac{E''}{R\theta}} \quad (\text{loi de Vant'Hoff}) \text{ avec } K_0 > 0, E'' = \Delta H$$

ΔH est > 0 (resp < 0) pour une réaction exothermique (resp. endothermique)

Quant à λ , on en connaît l'évolution empirique (fig. ci-dessous) par des tables :



Dans la plage de variation effective de la température, λ est fonction croissante de θ (l'approximation linéaire est en fait suffisante).

On obtient ainsi, pour S et θ , un système nouveau d'équations couplées, caractérisé par :

- a) une non-linéarité dans les termes d'ordre de différentiation les plus élevés
- b) une absence de monotonie dans le cas général.

On va en fait étudier un modèle un peu plus général présenté au paragraphe II.

Remarque : on peut se poser a priori la question de l'effet de l'introduction de paramètres variables. Au niveau des termes d'ordre 0, cet effet est bien connu par un calcul élémentaire de perturbations : la perturbation sur la solution est de l'ordre de la perturbation donnée. Si on introduit une perturbation au niveau du terme du deuxième ordre, on peut s'attendre à une modification quantitative au moins aussi importante. Considérons le problème modèle suivant, qui schématise assez bien la situation rencontrée

dans la suite, en ce qui concerne les termes d'ordre 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \frac{d}{dx} \left[(1 + \varepsilon |\theta|) \frac{d\theta}{dx} \right] - C = 0 \quad (C > 0) \\ \theta(0) = \theta(1) = 1 \end{array} \right.$$

La solution $\theta_\varepsilon(x) \geq 0$ est donnée par l'équation :

$$\theta_\varepsilon(x) + \frac{\varepsilon}{2} \theta_\varepsilon^2(x) = \frac{C}{2} (x - x^2) + 1 + \frac{\varepsilon}{2} = \theta_0(x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\theta_\varepsilon(x) = \theta_0(x) + \frac{\varepsilon}{2} (1 - \theta_0^2(x)) + \frac{\varepsilon^2}{2} (\theta_0^3(x) - \theta_0(x)) + \varepsilon^3 \dots$$

D'autre part, on conçoit qu'avec des modèles plus compliqués, l'introduction d'une perturbation dans le terme du deuxième ordre puisse donner lieu à une perte d'unicité.

II.- HYPOTHESES ET NOTATIONS.

Dans toute la suite de l'étude, Ω désignera un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, de frontière $\partial\Omega$ régulière. Σ désigne une partie de \mathbb{R}^2 précisée dans la suite et qui représente l'ensemble des valeurs pouvant être prises a priori par le couple $(S(x), \theta(x))$, $x \in \bar{\Omega}$. On désigne par D_{ij} , Λ_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$), F , G des fonctions définies sur $\Omega \times \Sigma$ à valeurs dans \mathbb{R} .

On s'intéresse au problème suivant : trouver $S(x)$, $\theta(x)$ solution du problème stationnaire couplé :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[D_{ij}(x, S, \theta) \frac{\partial S}{\partial x_j} \right] + F(x, S, \theta) = 0 \\ - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\Lambda_{ij}(x, S, \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right] + G(x, S, \theta) = 0 \\ S(x) = S_0; \theta(x) = \theta_0 \quad \text{pour } x \in \partial\Omega \end{array} \right.$$

On s'intéresse plus précisément aux solutions physiques, c'est-à-dire celles vérifiant $S(x), \theta(x) \geq 0$, avec $S_0, \theta_0 > 0$. Dans toute la suite, nous noterons (...) le produit scalaire usuel sur $L^2(\Omega)$ et $|\cdot|$ la norme associée. Sur $H^1(\Omega)$ ou $H_0^1(\Omega)$ nous prendrons la norme habituelle $\|\cdot\|$ définie par $\|u\|^2 = |u|^2 + |\nabla u|^2$.

III.- RESULTATS D'EXISTENCE.

III - 1 Le cas exothermique ($G \leq 0$)

Théorème III-1 : On prend $\Sigma = [0, S_0] \times [\theta_0, +\infty[$ et on fait les hypothèses suivantes :

- (i) $F(x, S, \theta) = SH(x, S, \theta)$ avec $H \geq 0$ sur $\Omega \times \Sigma$; $G \leq 0$ sur $\Omega \times \Sigma$
- (ii) $D_{ij}, \Lambda_{ij}, H, G$ sont de Carathéodory sur $\Omega \times \Sigma$;
- (iii) $D_{ij}, \Lambda_{ij}, H, G$ sont bornées sur $\Omega \times \Sigma$; (*)
- (iv) il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall (x, S, \theta) \in \Omega \times \Sigma, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\sum_{i,j=1}^n D_{ij}(x, S, \theta) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2; \quad \sum_{i,j=1}^n \Lambda_{ij}(x, S, \theta) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2;$$

Alors le problème (II-1) possède au moins une solution (S, θ) vérifiant :

$$0 \leq S(x) \leq S_0; \quad \theta_0 \leq \theta(x) \text{ p.p. avec } (S - S_0, \theta - \theta_0) \in [H_0^1(\Omega)]^2.$$

Preuve : on adapte une méthode de point fixe par compacité à ce problème; on introduit une formulation faible du problème (II-1) :

(*) On peut admettre une certaine croissance polynômiale à l'infini de H et G en θ (S est borné) cf. [51] par exemple.

$$(III-1) \begin{cases} \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}(x,S,\theta) \frac{\partial S}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i}) + (F(x,S,\theta), v) = 0 \\ \sum_{i,j=1}^n (\Lambda_{ij}(x,S,\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i}) + (G(x,S,\theta), v) = 0 \\ S - S_0, \theta - \theta_0 \in H_0^1(\Omega); \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Soit K le convexe fermé de $[H^1(\Omega)]^2$:

$$K = \{(S, \theta) \in (S_0, \theta_0) \oplus [H_0^1(\Omega)]^2 / 0 \leq S(x) \leq S_0; \theta_0 \leq \theta(x) \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

Soit T l'application : $(s, \theta) \in K \rightarrow (S, \Theta) \in [H^1(\Omega)]^2$ où (S, Θ) est l'unique solution du problème suivant :

$$(III-2) \begin{cases} \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}(x,s,\theta) \frac{\partial S}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i}) + (S H(x,s,\theta), v) = 0 \\ \sum_{i,j=1}^n (\Lambda_{ij}(x,s,\theta) \frac{\partial \Theta}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i}) + (G(x,s,\theta), v) = 0 \\ S - S_0, \Theta - \theta_0 \in H_0^1(\Omega); \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Pour s, θ fixé l'existence et l'unicité sont évidentes pour (III-2) qui est un problème linéaire coercif.

En prenant $v = S^- = \max(-S, 0)$ puis $v = (S - S_0)^+ = \max(S - S_0, 0)$ dans la première équation on obtient facilement : $0 \leq S(x) \leq S_0$ p.p. et avec $v = (\Theta - \theta_0)^-$ dans la deuxième équation, on obtient : $\Theta(x) \geq \theta_0$ p.p., donc T applique K dans lui-même.

En choisissant $v = S - S_0$, (resp. $v = \Theta - \theta_0$) on en déduit immédiatement les estimations (les C désignent des constantes diverses dans la suite) :

$$\alpha \|S - S_0\|_{H_0^1} \leq C$$

$\alpha \|\Theta - \Theta_0\|_{H_0^1} \leq C$ (en utilisant l'inégalité de Poincaré) la constante

étant indépendante de $(s, \theta) \in K$.

Si B_ρ désigne la boule dans $H^1(\Omega)^2$

$\{(S, \theta) / \|S - S_0\| \leq \frac{C}{\alpha}, \|\theta - \theta_0\| \leq \frac{C}{\alpha}\}$ alors T applique $K_\rho = K \cap B_\rho$

dans lui-même, K_ρ étant un convexe fermé borné de $H^1(\Omega)^2$ (en fait de $[(S_0, \theta_0) \oplus H_0^1(\Omega)^2]$).

Nous allons montrer que T est continue et compacte sur K_ρ , puis appliquer un théorème de point fixe à T , ce qui donnera l'existence d'une solution au problème (III-1).

♦ Montrons que $T(K_\rho)$ est relativement compact :

soit $(s_v, \theta_v) \in K_\rho$, il existe $(s, \theta) \in H^1(\Omega)^2$ tels que, après éventuellement extraction d'une sous-suite, $s_v \rightarrow s$, $\theta_v \rightarrow \theta$ dans $H^1(\Omega)$ faible, $L^2(\Omega)$ fort, et p.p.

Puisque $(S_v, \Theta_v) = T(s_v, \theta_v)$, $(S_v, \Theta_v) \in K_\rho$, il existe aussi $(S, \Theta) \in H^1(\Omega)^2$ tels que, après éventuellement une nouvelle extraction $S_v \rightarrow S$, $\Theta_v \rightarrow \Theta$ dans $H^1(\Omega)$ faible, $L^2(\Omega)$ fort, et p.p.

On prend $v = S_v - S \in H_0^1(\Omega)$ dans la première équation de (III-2) :

$$\sum_{i,j=1}^n (D_{ij}(x, s_v, \theta_v)) \frac{\partial S_v}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} (S_v - S) + \int_{\Omega} S_v H(x, s_v, \theta_v) (S_v - S) dx = 0$$

L'intégrale tend vers 0 puisque $S_v \rightarrow S$ dans $L^2(\Omega)$.

On écrit le terme restant sous la forme :

$$\sum_{i,j=1}^n D_{ij}(x, s_v, \theta_v) \frac{\partial S_v - S}{\partial x_j}, \frac{\partial S_v - S}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}(x, s, \theta)) \frac{\partial S}{\partial x_j}, \frac{\partial S_v - S}{\partial x_i}$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}(x, s_v, \theta_v) - D_{ij}(x, s, \theta)) \frac{\partial S}{\partial x_j}, \frac{\partial S_v - S}{\partial x_i} = (1) + (2) + (3)$$

Le terme (2) tend vers 0 car $S_v \rightarrow S$ dans $H^1(\Omega)$ faible.

Le terme (3) est, en valeur absolue, majoré par :

$$C \|S_v - S\| \sum_{i,j=1}^n \left[\int_{\Omega} [D_{ij}(x, s_v, \theta_v) - D_{ij}(x, s, \theta)]^2 \left(\frac{\partial S}{\partial x_j} \right)^2 dx \right]^{1/2}$$

qui tend vers 0 par application du théorème de Lebesgue.

On obtient donc $\lim_{v \rightarrow \infty} \sup \|S_v - S\| = 0$ donc $S_v \rightarrow S$ dans $H^1(\Omega)$ fort,

ce qui prouve bien que T est compacte.

♦ Montrons que T est continue sur K_p :

Si $s_v \rightarrow s$, $\theta_v \rightarrow \theta$ dans $H^1(\Omega)$ fort, alors $(S_v, \Theta_v) = T(s_v, \theta_v) \in K_p$

donc (après extraction...) $S_v \rightarrow S$ et $\Theta_v \rightarrow \Theta$ dans $H^1(\Omega)$ fort et p.p.

Le raisonnement fait pour la compacité prouve alors que les convergences ont lieu dans $H^1(\Omega)$ fort.

Ecrivons alors la première équation de (III-2) :

$$\sum_{i,j=1}^n (D_{ij}(x, s_v, \theta_v) \frac{\partial S}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i}) + (S_v H(x, s_v, \theta_v), v) = 0$$

Puisque $\frac{\partial S_v}{\partial x_j} \rightarrow \frac{\partial S}{\partial x_j}$ dans $L^2(\Omega)$ fort et que les D_{ij} sont bornées, on peut

passer à la limite dans l'équation ci-dessus, en utilisant le théorème de Lebesgue, ce qui donne :

$$\sum_{i,j=1}^n (D_{ij}(x, s, \theta) \frac{\partial S}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i}) + (S H(x, s, \theta), v) = 0.$$

Grâce à l'unicité dans le problème (III-2), on a donc :

$S, \Theta = T(S, \theta)$ et toute la suite S_v, Θ_v converge vers S, Θ , ce qui prouve que T est continue sur K_ρ muni de la topologie de $H^1(\Omega)$.

T étant continue et compacte sur K_ρ , convexe borné, admet un point fixe d'après un théorème de point fixe de Schauder [6] ■

Remarques:

1°/ Pour obtenir $\lim \sup \|S_v - S\| = 0$ on peut aussi utiliser les propriétés des applications de type (S_+) , cf [22] , [23] .

2°/ Lorsque H par exemple est à croissance au plus linéaire en θ , la convergence vers 0 d'un terme tel que

$\int_{\Omega} S_v H(x, s_v, \theta_v) (S_v - S) dx$ s'obtient en utilisant la continuité $L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ des opérateurs de Nemytskii associés aux fonctions à croissance au plus linéaire à l'infini (avec $n \leq 4$ pour que $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$).

III - 2 Le cas endothermique ($G \geq 0$)

On peut encore appliquer la méthode ci-dessus pour obtenir un résultat analogue. Toutefois, pour G assez grand, on n'est pas assuré que θ reste ≥ 0 , ce qui n'aurait alors pas de sens physique; on est conduit à introduire une hypothèse sur $G^{(*)}$ pour garantir la positivité des solutions. D'autre part, dans le cas $G \geq 0$, on a $\theta(x) \leq \theta_0$. En fait, $(0,0)$ et (S_0, θ_0) sont, respectivement, sous - et sur - solutions en un sens généralisé, du problème (III - 1).

(*) hypothèse qui sera vérifiée en pratique, cf. paragraphe III - 4 ci-après.

Théorème III-2 : Les hypothèses sont les suivantes, avec

$$\Sigma = [0, S_0] \times [0, \theta_0] :$$

- i) $F(x, S, \theta) = SH(x, S, \theta)$; $G(x, S, \theta) = \theta K(x, S, \theta)$ avec $H, K \geq 0$ sur $\Omega \times \Sigma$;
- ii) $D_{ij}, \Lambda_{ij}, H, K$ sont de Carathéodory sur $\Omega \times \Sigma$;
- iii) D_{ij}, Λ_{ij} vérifient la condition de coercivité du théorème III-1 sur $\Omega \times \Sigma$;

Alors, le problème (II-1) possède au moins une solution (S, θ) vérifiant $0 \leq S(x) \leq S_0$; $0 \leq \theta(x) \leq \theta_0$ p.p. sur Ω avec $S - S_0, \theta - \theta_0 \in H_0^1(\Omega)^2$.

Preuve : avec la formulation (III-1) de (II-1), on associe l'opérateur

$T : (s, \theta) \rightarrow (S, \Theta)$ où (S, Θ) est solution du système :

$$(III-3) \begin{cases} \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}(x, s, \theta) \frac{\partial S}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i}) + (S H(x, s, \theta), v) = 0. \\ \sum_{i,j=1}^n (\Lambda_{ij}(x, s, \theta) \frac{\partial \Theta}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i}) + (\Theta K(x, s, \theta), v) = 0 \\ S - S_0, \Theta - \theta_0 \in H_0^1(\Omega)^2; \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Le découplage sur F et G est précisément réalisé pour avoir des solutions physiques, puis on opère comme dans le cas exothermique, avec cette fois

$$K_\rho = \{(S, \theta) \in (S_0, \theta_0) + H_0^1(\Omega)^2 / 0 \leq S \leq S_0, 0 \leq \theta \leq \theta_0 \text{ p.p.};$$

$$\|S - S_0\| \leq \rho; \|\theta - \theta_0\| \leq \rho\}$$

où ρ résulte des estimations a priori ■

III-3. Le cas dégénéré.

Pour les modèles endothermiques, $\theta(x)$ est seulement ≥ 0 a priori (et non

pas > 0) donc, pour le modèle physique (cf.I) $D(\theta) \geq 0$ avec $D(0) = 0$, la coercivité peut tomber en défaut. Toutefois au moins dans un cas particulier (contenant le modèle physique) on peut se ramener au cas coercif.

Considérons le problème suivant : $(\Sigma = [0, S_0] \times [0, \theta_0])$.

$$(III-4) \begin{cases} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[D(\theta) \frac{\partial S}{\partial x_i} \right] + F(x, S, \theta) = 0 \\ - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\Lambda(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right] + G(x, S, \theta) = 0 \end{cases}$$

avec des conditions aux limites $S_0 > 0, \theta_0 > 0$.

On fait les hypothèses suivantes :

- (i) $F(x, S, \theta) = SH(x, S, \theta); G(x, S, \theta) = \theta K(x, S, \theta)$ avec $H, K \geq 0$ sur $\Omega \times \Sigma$
- (ii) H, K sont de Carathéodory sur $\Omega \times \Sigma$
- (iii) D, Λ sont continues sur \mathbb{R} , H et K sont bornées sur $\Omega \times \Sigma$
- (iv) $D(\theta) > 0$ si $\theta > 0$; $\Lambda(\theta) \geq \alpha > 0$ pour $\theta \geq 0$.

Soit S, θ une solution éventuelle du problème dans $(S_0, \theta_0) \in H_0^1(\Omega)^2$; pour $u \in \mathbb{R}_+$,

on pose : $\beta(u) = \int_0^u \Lambda(t) dt^{(*)}$, β est une bijection strictement monotone

sur \mathbb{R} ; on pose aussi $\psi(x) = \beta(\theta(x))$, $\psi_0 = \beta(\theta_0)$, alors $\psi - \psi_0 \in H_0^1(\Omega)$ si $0 \leq \theta \leq \theta_0$, et on obtient le système suivant pour (S, ψ) , équivalent à (III-4) :

$$(III-5) \begin{cases} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[D(\beta^{-1}(\psi)) \frac{\partial S}{\partial x_i} \right] + S H(x, S, \beta^{-1}(\psi)) = 0 \\ - \Delta \psi + \beta^{-1}(\psi) K[x, S, \beta^{-1}(\psi)] = 0 \\ S - S_0, \psi - \psi_0 \in H_0^1(\Omega)^2 \end{cases}$$

(*) prolongée sur \mathbb{R}_- par $\Lambda(0)u$ par exemple.

Théorème III-3 :

Sous les hypothèses (i), (ii), (iii), (iv) ci-dessus, le problème (III-4) possède au moins une solution (S, θ) avec $0 \leq S \leq S_0$; $0 \leq \theta \leq \theta_0$; $(S - S_0, \theta - \theta_0) \in H_0^1(\Omega)^2$.

Preuve : on raisonne sur le problème (III-5) et on considère l'application $T : (S_1, \psi_1) \rightarrow (S_2, \psi_2)$ où (S_2, ψ_2) est la solution du système suivant, avec $0 \leq S_1 \leq S_0$; $\varepsilon \leq \psi_1 \leq \psi_0$ ε étant pour le moment pris quelconque dans $]0, \psi_0[$:

$$(III-6) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D(\beta^{-1}(\psi_1)) \frac{\partial S_2}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) + (S_2 H(x, S_1, \beta^{-1}(\psi_1)), v) = 0 \\ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) + (\beta^{-1}(\psi_2) K(x, S_1, \beta^{-1}(\psi_1)), v) = 0 \\ S_2 - S_0 \in H_0^1(\Omega); \psi_2 - \psi_0 \in H_0^1(\Omega); \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$

La deuxième équation admet une solution unique ψ_2 puisqu'on est dans le cadre d'un opérateur, $-\Delta + K(x, S_1, \beta^{-1}(\psi_1))\beta^{-1}(\cdot)$ monotone, borné, hémicontinu. Il en va de même pour la première équation (*) pour laquelle les choix usuels $v = S_2^-$ et $v = (S_0 - S_2)^-$ conduisent à l'inégalité : $0 \leq S_2(x) \leq S_0$ p.p.

En prenant $v = \psi_2^- \in H_0^1(\Omega)$ on montre d'abord que ψ_2 est ≥ 0 puisque $\psi_2^- \beta^{-1}(\psi_2) \leq 0$, ensuite que $\psi_2 \leq \psi_0$ par le principe du maximum pour les solutions faibles ([47]). Il reste à voir que $\psi_2 \geq \varepsilon$ p.p. si ε est choisi assez petit.

(*) car $D(\beta^{-1}(\psi_1))(x) \geq \inf\{D(z) / 0 < \beta^{-1}(\varepsilon) \leq z \leq \theta_0\} > 0$

Or si $M = \|K(x, S, \theta)\|_{L^\infty(\Omega \times \Sigma)}$ et si ψ désigne l'unique solution du problème :

$-\Delta\psi + M\beta^{-1}(\psi) = 0$, $\psi - \psi_0 \in H_0^1(\Omega)$ on montre, par le principe du maximum([47]) que $0 \leq \psi \leq \psi_2 \leq \psi_0$ p.p. (on prend $v = (\psi_2 - \psi)^-$ dans la formulation faible et on fait la différence des deux équations donnant ψ_2 et ψ).

Grâce à l'hypothèse $\Lambda(0) \neq 0$, $\sup \left\{ \frac{\beta^{-1}(t)}{t}, 0 \leq t \leq \psi_0 \right\} = N$ est > 0 fini.

Si $\tilde{\psi}$ désigne la solution du problème
$$\begin{cases} -\Delta\tilde{\psi} + MN\tilde{\psi} = 0 \\ \tilde{\psi} - \psi_0 \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

on vérifie que $\tilde{\psi} \geq \psi \geq 0$ p.p. Il suffit alors de choisir $\varepsilon = \inf\{\tilde{\psi}(x)/x \in \Omega\} > 0$ et pour convexe $K^\varepsilon = \{(S, \psi) \in (S_0, \psi_0) \oplus H_0^1(\Omega)^2 / 0 \leq S \leq S_0; \varepsilon \leq \psi \leq \psi_0\}$;

$\|S - S_0\| \leq \rho(\varepsilon), \|\psi - \psi_0\| \leq \rho(\varepsilon)$ où $\rho(\varepsilon)$ résulte des estimations a priori, pour avoir une application $T : (S_1, \psi_1) \longrightarrow (S_2, \psi_2)$ de K^ε dans lui-même à laquelle on peut appliquer l'argument de point fixe du III-1 ou III-2 ■

III - 4 Application au système physique.

Cas exothermique : on pose $D(\theta) = D_0 e^{-\frac{E}{R\theta}}$ $\theta \geq \theta_0$

$\Lambda(\theta) = \lambda(\theta)$ pour $\theta \geq \theta_0$

$$F(x, S, \theta) = \frac{V_0 e^{-\frac{E'}{R\theta}} S}{K_0 e^{-\frac{E''}{R\theta}} + |S|} \geq 0 \quad H(x, S, \theta) = \frac{V_0 e^{-\frac{E'}{R\theta}}}{K_0 e^{-\frac{E''}{R\theta}} + |S|} \geq 0$$

$$G(x, S, \theta) = -\Delta H F(x, S, \theta) \leq 0 \quad (E'' = \Delta H \geq 0)$$

Les hypothèses du Théorème III-1 sont vérifiées puisque sur Σ , D, Λ, H et G

sont bornées $D \geq \alpha$ $\lambda \geq \alpha$ avec $\Sigma = [0, S_0] \times [\theta_0, \infty[$

Cas endothermique :

$$D(\theta) = D_0 e^{-\frac{E}{R\theta}} \quad (\theta > 0) \quad D(0) = 0,$$

$$\Lambda(\theta) = \lambda(\theta), \theta \geq 0 \quad F(x, S, \theta) = S H(x, S, \theta) \quad \text{avec}$$

$$H(x, S, \theta) = \frac{V_0 e^{-\frac{E'}{R\theta}}}{K_0 e^{-\frac{E''}{R\theta}} + |S|} \geq 0 \quad \text{et majoré par}$$

$$\frac{V_0}{K_0} e^{\frac{E''}{R\theta}} \leq \frac{V_0}{K_0} \quad \text{car } E'' \leq 0.$$

$$G(x, S, \theta) = \theta K(x, S, \theta) \quad \text{avec}$$

$$K(x, S, \theta) = \frac{(-\Delta H) V_0 e^{-\frac{E'}{R\theta}} S}{(K_0 e^{-\frac{E''}{R\theta}} + |S|) \theta} \quad \text{est } \geq 0 \text{ et majoré par}$$

$|\Delta H| V_0 \sup \left\{ \frac{e^{-\frac{E'}{R\theta}}}{\theta} / \theta \geq 0 \right\} < \infty$. Comme $\lambda(0)$ est > 0 , on peut alors appliquer le théorème III - 3.

IV. EXISTENCE PAR DES METHODES CONSTRUCTIVES DANS DES CAS PARTICULIERS.

Moyennant quelques hypothèses supplémentaires, on peut montrer l'existence de solutions par des procédés itératifs conduisant à une convergence monotone et intéressants numériquement. Certains résultats sont une généralisation de ce qui a été fait dans [57].

Afin de justifier les hypothèses de monotonie faites ci-après sur le terme de réaction, reprenons le problème modèle physique avec :

$$F(x, S, \theta) = \frac{V_0 e^{-\frac{E'}{R\theta}} S}{K_0 e^{-\frac{E''}{R\theta}} + |S|} = S H(x, S, \theta),$$

$$G(x, S, \theta) = -\Delta H F(x, S, \theta) = \theta K(x, S, \theta) \quad (\text{dans le cas endothermique uniquement})$$

avec $\Delta H = E''$.

Le signe de $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ est celui de $E'S + K_0 e^{-\frac{E''}{R\theta}} (E' - E'')$

Le signe de $\frac{\partial K}{\partial \theta}$ est celui de $E' - R\theta + \frac{K_0 E''}{K_0 e^{-\frac{E''}{R\theta}} + |S|}$

On a le tableau suivant, concernant les variations de F, G, H, K selon S, θ :

		signe dérivées	$E' \geq E''$	$E'' \geq E'(1 + \frac{S_0}{K_0})$	$E' - R\theta_0 + E'' e^{\frac{E''}{R\theta_0}} \geq 0$	$E', E'' \forall$
EXOTHERMIQUE $E'' > 0$ $(S, \theta) \in [0, S_0] \times [\theta_0, \infty[$	F	≥ 0	/ en S / en θ	/ en S \ en θ		
	G	≤ 0	\ en S \ en θ	\ en S / en θ		
	H	≥ 0	\ en S / en θ	\ en S \ en θ		
ENDOTHERMIQUE $E'' < 0$ $(S, \theta) \in [0, S_0] \times [0, \theta_0]$	F	≥ 0			/ en S / en θ	/ en S / en θ
	G	≥ 0			/ en S / en θ	/ en S / en θ
	H	≥ 0			\ en S / en θ	\ en S / en θ
	K	≥ 0			/ en S / en θ	/ en S \ en θ

(*) Si $\frac{E'}{K_0} \leq \frac{-E''}{K_0 + S_0 e^{\frac{E''}{R\theta_0}}}$ monotonie selon S, θ

On va examiner d'abord quelques modèles particuliers issus de (II-1) et compatibles avec le tableau ci-dessus.

IV - 1. Problème quasi-linéaire avec hypothèses de monotonie :

On se place dans le cadre simplifié du § III-3 en supposant de plus $D(\theta) = D$ constant, c'est-à-dire qu'on considère le problème suivant :

$$(IV-1) \quad \begin{cases} -D \Delta S + F(x, S, \theta) = 0 \\ - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\Lambda(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right] + G(x, S, \theta) = 0 \\ S - S_0 = \theta - \theta_0 = 0 \quad \text{si} \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

a) cas exothermique, avec les hypothèses du § III-2 :

$\Sigma = [0, S_0] \times [\theta_0, \infty[$, $F(x, S, \theta) = SH(x, S, \theta)$, $H \geq 0$, $G \leq 0$, G, H de Carathéodory sur $\Omega \times \Sigma$, bornées, et Λ continue bornée sur $[\theta_0, \infty[$

On considère les schémas itératifs suivants, obtenus par découplage de (IV-1) en résolvant d'abord l'équation en S (resp. en θ) :

On part de θ^0 donné et à l'ordre K on résout :

$$(IV-2) \quad \begin{cases} -D \Delta S^K + F(x, S^K, \theta^{K-1}) = 0 \\ - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\Lambda(\theta^K) \frac{\partial \theta^K}{\partial x_i} \right] + G(x, S^K, \theta^K) = 0 \\ S^K - S_0 = \theta^K - \theta_0 = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

On part de S^0 donné et à l'ordre K on résout :

$$(IV-3) \quad \begin{cases} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\Lambda(\theta^K) \frac{\partial \theta^K}{\partial x_i} \right] + G(x, S^{K-1}, \theta^K) = 0 \\ -D \Delta S^K + F(x, S^K, \theta^K) = 0 \\ S^K - S_0 = \theta^K - \theta_0 = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Remarque : l'équation en θ se résout en posant $\psi = \beta(\theta)$ ce qui donne un système quasi-linéaire.

La proposition suivante montre comment on peut obtenir un encadrement par solutions minimales et maximales de (IV-1).

Proposition IV - 1 : On suppose F croissante en S , décroissante en θ , G décroissante en S , croissante en θ .

(i) partant de $\theta^0 = \theta_0$ l'algorithme (IV-2) fournit une suite (S^K, θ^K) , croissante, et S^K / \underline{S} , $\theta^K / \underline{\theta}$ p.p.

(ii) partant de $S^0 = S_0$ l'algorithme (IV-3) fournit une suite (S^K, θ^K) , décroissante et $S^K \setminus \bar{S}$, $\theta^K \setminus \bar{\theta}$.

(iii) $(\underline{S}, \underline{\theta})$ et $(\bar{S}, \bar{\theta})$ sont des solutions du problème (IV-1)

(iv) toute solution (S, θ) de (IV-1) vérifie : $0 \leq \underline{S}(x) \leq S(x) \leq \bar{S}(x) \leq S_0$
 $\theta_0 \leq \underline{\theta}(x) \leq \theta(x) \leq \bar{\theta}(x)$ p.p. sur Ω .

Preuve : pour $\theta(x)$ donné, la première équation de (IV-1) fournit une solution $S = \mathcal{H}(\theta)$ unique par monotonie. De plus, il est facile de voir que \mathcal{H} est monotone :

$\theta_1(x) \geq \theta_2(x) \Rightarrow \mathcal{H}(\theta_1) \geq \mathcal{H}(\theta_2)$ et, grâce à la forme de F , $0 \leq S(x) \leq S_0$. La deuxième équation fournit, à S fixé, une solution $\theta = \mathcal{K}(S)$ unique par monotonie selon θ ; \mathcal{K} est croissante et $\theta(x) \geq \theta_0$ puisque G est ≤ 0 . Comme (IV-2) s'écrit $S^K = \mathcal{H}(\theta^{K-1})$, $\theta^K = \mathcal{K}(S^K)$ on a la croissance des suites S^K, θ^K . Comme $\theta^K(x) \leq \theta_\infty(x) \in L^\infty(\Omega)$ où θ_∞ est la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\Lambda(\theta_\infty) \frac{\partial \theta_\infty}{\partial x_i} \right] - |G|_{L^\infty(\Omega \times \Sigma)} = 0 \\ \theta_\infty - \theta_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

on en déduit que $S^K / \underline{S}(x)$, $\theta^K / \underline{\theta}(x)$ p.p. et des estimations classiques dans $H^1(\Omega)$ montrent alors qu'on peut passer à la limite en K dans (IV-2)^(★) pour voir que $(\underline{S}, \underline{\theta})$ est solution du problème (IV-2). Enfin, si (S, θ) est une solution de (IV-1) on a en particulier : $\theta \geq \theta_0$ donc $S = \mathcal{J}^K(\theta) \geq \mathcal{J}^K(\theta_0) = S^K$ et lorsque $K \rightarrow \infty$: $S \geq \underline{S}$ p.p. et aussi $\theta \geq \underline{\theta}$. Pour l'algorithme (IV-3), on a $\theta^K = \mathcal{J}^K(S^{K-1})$, $S^K = \mathcal{J}^K(\theta^K)$ ■

Remarque 1 : on ne peut pas "linéariser" complètement les schémas (IV-2) et (IV-3) en admettant un "retard" dans F et G car on perd la monotonie; toutefois si on considère les deux schémas suivants, obtenus en linéarisant complètement l'équation donnant S :

$$(IV-4) \begin{cases} -D \Delta S^K + S^K H(x, S^{K-1}, \theta^{K-1}) = 0 \\ -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\Lambda(\theta^K) \frac{\partial \theta^K}{\partial x_i} \right] + G(x, S^K, \theta^K) = 0 \\ S^K - S_0 = \theta^K - \theta_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad S^0, \theta^0 \text{ donnés dans } \Sigma. \end{cases}$$

$$(IV-5) \begin{cases} -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\Lambda(\theta^K) \frac{\partial \theta^K}{\partial x_i} \right] + G(x, S^{K-1}, \theta^K) = 0 \\ -D \Delta S^K + S^K H(x, S^{K-1}, \theta^K) = 0 \\ S^K - S_0 = \theta^K - \theta_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad S^0 \text{ donné} \end{cases}$$

On peut démontrer la :

Proposition IV-2 : on suppose que H est ≥ 0 , décroissante en S et θ , G décroissante en S et croissante en θ .

(★) (S^K, θ^K) converge vers (S, θ) dans $(S_0, \theta_0) + H_0^1(\Omega)^2$ faible et même fort.

(i) Partant de $(S^0, \theta^0) = (0, \theta_0)$, l'algorithme (IV-4) fournit une suite croissante $(S^K, \theta^K) / (\underline{S}, \underline{\theta})$.

(ii) Partant de $S^0 = S_0$, l'algorithme (IV-5) fournit une suite décroissante $(S^K, \theta^K) \searrow (\bar{S}, \bar{\theta})$.

(iii) $(\underline{S}, \underline{\theta})$, resp. $(\bar{S}, \bar{\theta})$ représentent les solutions minimale, resp. maximale, de (IV-1).

Preuve : (i) $S^1 \geq S^0 = 0$, $\theta^1 \geq \theta^0 = \theta_0$ puis on procède par récurrence; pour (ii) $S^1 \leq S^0 = S_0$ et $\theta^2 \leq \theta^1$ et on procède également par récurrence; (iii) tient au fait que si (S, θ) est solution de (IV-1) la suite issue de (S, θ) pour (IV-4) ou (IV-5) est stationnaire ■

Remarque 2 : dans le cas physique, F est proportionnelle à $-G$, ce qui implique, lorsque D est constant, que S est fonction linéaire décroissante de $\beta(\theta)$ d'où l'on déduit aisément l'unicité lorsque F est croissante en S , décroissante en θ . Il n'en va plus de même lorsque F est croissante en S et θ (ce cas est possible, cf. Tableau au début du § IV).

b) cas endothermique : on reprend les hypothèses du § III-2 :

$\Sigma = [0, S_0] \times [0, \theta_0]$, $F(x, S, \theta) = S H(x, S, \theta)$, $G(x, S, \theta) = \theta K(x, S, \theta)$, H , $K \geq 0$ bornées sur $\Omega \times \Sigma$, de Carathéodory, Λ continue sur $[0, \theta_0]$, et on considère d'abord le schéma (IV-2) obtenu par découplage, sans linéarisation complète en partant de $\theta^0 = \theta_0$.

Proposition IV-3 : On suppose F et G croissantes en S et θ .

L'algorithme (IV-2) définit une suite S^K, θ^K (unique) telle que $(S^K(x), \theta^K(x)) \in \Sigma$. La suite S^K est croissante S^K / \underline{S} , la suite θ^K est

décroissante, $\theta^K \setminus \bar{\theta}$ et $(\underline{S}, \bar{\theta})$ est une solution du problème IV-1. Si (S, θ) est une autre solution de (IV-1) alors $0 \leq \underline{S} \leq S \leq S_0$, $0 \leq \theta < \bar{\theta} \leq \theta_0$ p.p.

On peut dire que $(\underline{S}, \bar{\theta})$ est une solution "minimale-maximale" du problème (IV-1).

Comme dans le cas exothermique, on peut obtenir un encadrement en résolvant d'abord l'équation donnant θ , lorsque S est fixé :

Proposition IV-4 : On suppose F et G croissantes en S et θ .

Partant de $S^0 = S_0$, l'algorithme (IV-3) fournit deux suites $S^K \setminus \bar{S}$,

$\theta^K / \underline{\theta}$ où $(\bar{S}, \underline{\theta})$ est solution maximale-minimale du problème (IV-1) :

$S(x) \leq \bar{S}(x)$, $\underline{\theta}(x) \leq \theta(x)$ pour toute solution (S, θ) de (IV-1).

Les démonstrations de ces deux résultats sont en tous points analogues à ce qui a été fait pour le cas exothermique ■

On ne peut pas linéariser complètement (IV-2) ou (IV-3) en introduisant un retard sur θ et S dans le terme de réaction car on perd à priori la positivité et la monotonie (en fait on obtient la monotonie pour (S^{2p}, θ^{2p}) $(S^{2p+1}, \theta^{2p+1})$ en partant d'initialisations convenables, ce qui est insuffisant pour passer à la limite). Toutefois, on peut linéariser de la manière suivante :

soit $F(x, S, \theta) = S H(x, S, \theta)$

$G(x, S, \theta) = \theta K(x, S, \theta)$

$H \geq 0$, $K \geq 0$ de Carathéodory, bornées sur $\Omega \times \Sigma$.

On considère le schéma suivant :

$$(IV-6) \left\{ \begin{array}{l} - D \Delta S^K + S^K H(x, S^{K-1}, \theta^{K-1}) = 0 \\ - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\Lambda(\theta^K) \frac{\partial \theta^K}{\partial x_i} \right] + \theta^K K(x, S^{K-1}, \theta^{K-1}) = 0 \\ S^K - S_0 = \theta^K - \theta_0 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

avec une initialisation (S^0, θ^0) donnée.

L'existence de $S^K, \theta^K \in (S_0, \theta_0) \oplus H_0^1(\Omega)^2$ lorsque S^{K-1}, θ^{K-1} sont donnés est évidente : on est dans le cadre d'opérateurs monotones (et linéaires!) et, toujours par la même technique, on montre la :

Proposition IV-5 : on suppose que H est décroissante en S , croissante en θ , K croissante en S , décroissante en θ . Partant de $S^0 = 0, \theta^0 = \theta_0$ on obtient par (IV-6) une suite S^K, θ^K telle que $S^K \nearrow \underline{S}, \theta^K \searrow \bar{\theta}$. Partant de $S^0 = S_0, \theta^0 = 0$, on obtient une suite (S^K, θ^K) telle que $S^K \searrow \bar{S}, \theta^K \nearrow \underline{\theta}$. $(\underline{S}, \bar{\theta})$ et $(\bar{S}, \underline{\theta})$ sont les solutions minimale-maximale et maximale-minimale du problème (IV-1).

Cet algorithme complètement linéarisé permet donc un encadrement des solutions.

IV-2 Problème quasi-linéaire sans hypothèse de monotonie.

On considère encore le système (IV-1) :

$$(IV-1) \left\{ \begin{array}{l} - D \Delta S + F(x, S, \theta) = 0 \\ - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\Lambda(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right] + G(x, S, \theta) = 0 \\ S - S_0 = \theta - \theta_0 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

sans hypothèses de monotonie cette fois, si ce n'est la croissance de F selon S , mais on suppose F, G lipschitziennes en $(S, \theta) \in \Sigma$ uniformément

pour $x \in \Omega$, $F(x, S, \theta) = S H(x, S, \theta)$, $H \geq 0$ bornée sur $\Omega \times \Sigma$, $G \leq 0$ bornée si $\Sigma = [0, S_0] \times [\theta_0, \infty[$, $G(x, S, \theta) = \theta K(x, S, \theta)$, $K \geq 0$ bornée si $\Sigma = [0, S_0] \times [0, \theta_0]$.

On suppose aussi que Λ est continue et que $0 \leq \alpha \leq \Lambda(\theta) \leq M$, d'où il résulte que :

$$\beta(t) = \int_0^t \Lambda(u) du \text{ est lipschitzienne ainsi que } \beta^{-1}.$$

Le problème (IV-1) est équivalent au suivant, où on a posé $\psi = \beta(\theta)$, $\psi_0 = \beta(\theta_0)$:

$$(IV-1_a) \begin{cases} -D\Delta S + F(x, S, \beta^{-1}(\psi)) = 0 \\ -\Delta \psi + G(x, S, \beta^{-1}(\psi)) = 0 \\ S - S_0 = \psi - \psi_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \iff (IV-1_b) \begin{cases} -\Delta S + F_1(x, S, \psi) = 0 \\ -\Delta \psi + G_1(x, S, \psi) = 0 \\ S - S_0 = \psi - \psi_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On suppose qu'il est possible de modifier F et G convenablement lorsque $(S, \theta) \notin \Sigma$ pour que les hypothèses de départ soient vraies pour $(S, \theta) \in \mathbb{R}^2$.

Pour résoudre (IV-1_b) on va considérer la méthode des pas fractionnaires suivante ([76]), qui consiste à décomposer le système (IV-1) en un système algébrique non linéaire (résolu en pratique par prédiction - correction) et un système différentiel linéaire :

$$(IV-7) \begin{cases} (a) \quad S^{K+\frac{1}{2}} - S^K + \tau_K F_1(x, S^{K+\frac{1}{2}}, \psi^{K+\frac{1}{2}}) = 0 \\ (b) \quad \psi^{K+\frac{1}{2}} - \psi^K + \tau_K G_1(x, S^{K+\frac{1}{2}}, \psi^{K+\frac{1}{2}}) = 0 \end{cases}$$

$$(IV-8) \begin{cases} (a) \quad \begin{cases} S^{K+1} - S^{K+\frac{1}{2}} - \tau_K \Delta S^{K+1} = 0 \\ S^{K+1} - S_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \\ (b) \quad \begin{cases} \psi^{K+1} - \psi^{K+\frac{1}{2}} - \tau_K \Delta \psi^{K+1} = 0 \\ \psi^{K+1} - \psi_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \end{cases}$$

avec une initialisation $(S; \theta^0) = (S_0, \theta_0)$ par exemple, $\tau_K > 0$ étant un pas variable.

On vérifie immédiatement que si τ_K est assez petit ($\tau_K L < 1$, L constante de de Lipschitz selon S, ψ , commune à F_1 et G_1), (IV-7) possède une unique solution

$(S^{K + \frac{1}{2}}, \psi^{K + \frac{1}{2}})$ lorsque (S^K, ψ^K) est donné et (IV-8) a toujours une unique solution $S^{K+1}, \psi^{K+1} \in (S_0, \psi_0) \oplus H_0^1(\Omega)^2$ dans le cas $\tau_K > 0$.

On peut démontrer alors le résultat de convergence suivant :

Proposition IV-6 : On suppose que F_1 (i.e. F) est croissante selon S et que les constantes de Lipschitz de F_1 selon ψ et de G_1 selon S, ψ sont suffisamment petites (★).

Soit τ_K une suite de réels > 0 vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) τ_K décroît vers 0
- (ii) $K\tau_K$ tend vers $+\infty$ en croissant, $K\tau_K - (K-1)\tau_{K-1}$ tend vers $+\infty$
- (iii) la série τ_K^2 converge (exemple $\tau_K = \frac{\tau}{K^\alpha}$, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$).

Alors l'algorithme à pas fractionnaires (IV-7)(IV-8) fournit une suite S^K, ψ^K convergeant, ainsi que $S^{K + \frac{1}{2}}, \psi^{K + \frac{1}{2}}$ vers (S, ψ) dans $L^2(\Omega)$, où (S, ψ) est l'unique solution de (IV-1). (★)

(★) on montre aisément que si les constantes de Lipschitz de F_1 selon ψ et G_1 selon (S, ψ) sont assez petites, i.e. F et G ne dépendent pas trop de θ et S, θ , ce qui est vrai dans le modèle physique si E' et E'' sont petits (F étant croissante en S) alors on a l'unicité de la solution au problème (IV-1). Si G est croissante en θ , il suffit de considérer les constantes de Lipschitz selon S pour G et θ pour F .

Preuve : S, ψ étant la solution de (IV-1 b) on pose :

$$u^{K+\frac{1}{2}} = S^{K+\frac{1}{2}} - S, \quad v^{K+\frac{1}{2}} = \psi^{K+\frac{1}{2}} - \psi, \quad i = 1, 2$$

et on obtient le système suivant en (u, v) :

$$(IV-9) \quad \begin{cases} u^{K+\frac{1}{2}} - u^K + \tau_K F_1(x, S^{K+\frac{1}{2}}, \psi^{K+\frac{1}{2}}) = 0 \\ v^{K+\frac{1}{2}} - v^K + \tau_K G_1(x, S^{K+\frac{1}{2}}, \psi^{K+\frac{1}{2}}) = 0 \end{cases}$$

$$(IV-10) \quad \begin{cases} u^{K+1} - u^{K+\frac{1}{2}} - \tau_K \Delta u^{K+1} - \tau_K F_1(x, S, \psi) = 0 \\ v^{K+1} - v^{K+\frac{1}{2}} - \tau_K \Delta v^{K+1} - \tau_K G_1(x, S, \psi) = 0 \\ u^{K+1}, v^{K+1} \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Comme d'habitude, on multiplie les équations de (IV-9) par $u^{K+\frac{1}{2}}, v^{K+\frac{1}{2}}$,

les équations de (IV-10) par u^{K+1}, v^{K+1} et on intègre sur Ω :

$$(IV-11) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \left[|u^{K+\frac{1}{2}}|^2 - |u^K|^2 + |u^{K+\frac{1}{2}} - u^K|^2 \right] + \tau_K \int_{\Omega} F_1(x, S^{K+\frac{1}{2}}, \psi^{K+\frac{1}{2}}) u^{K+\frac{1}{2}} dx = 0 \\ \frac{1}{2} \left[|v^{K+\frac{1}{2}}|^2 - |v^K|^2 + |v^{K+\frac{1}{2}} - v^K|^2 \right] + \tau_K \int_{\Omega} G_1(x, S^{K+\frac{1}{2}}, \psi^{K+\frac{1}{2}}) v^{K+\frac{1}{2}} dx = 0 \end{cases}$$

$$(IV-12) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \left[|u^{K+1}|^2 - |u^{K+\frac{1}{2}}|^2 + |u^{K+1} - u^{K+\frac{1}{2}}|^2 \right] + \tau_K |\nabla u^{K+1}|^2 - \\ - \tau_K \int_{\Omega} F_1(x, S, \psi) u^{K+1} dx = 0 \\ \frac{1}{2} \left[|v^{K+1}|^2 - |v^{K+\frac{1}{2}}|^2 + |v^{K+1} - v^{K+\frac{1}{2}}|^2 \right] + \tau_K |\nabla v^{K+1}|^2 - \\ - \tau_K \int_{\Omega} G_1(x, S, \psi) v^{K+1} dx = 0 \end{cases}$$

On additionne les premières équations de IV (11) et (12) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[|u^{K+1}|^2 - |u^K|^2 + \sum_{i=1}^2 \left| u^{K+\frac{1}{2}} - u^{K+\frac{i-1}{2}} \right|^2 \right] + \tau_K |\nabla u^{K+1}|^2 + \\ & + \tau_K \int_{\Omega} \left[F_1 \left(x, S^{K+\frac{1}{2}}, \psi^{K+\frac{1}{2}} \right) - F_1 \left(x, S, \psi^{K+\frac{1}{2}} \right) \right] u^{K+\frac{1}{2}} dx + \\ & + \tau_K \int_{\Omega} F_1 \left(x, S, \psi^{K+\frac{1}{2}} \right) \left(u^{K+\frac{1}{2}} - u^{K+1} \right) dx + \tau_K \int_{\Omega} \left[F_1 \left(x, S, \psi^{K+\frac{1}{2}} \right) - \right. \\ & \left. - F_1 \left(x, S, \psi \right) \right] u^{K+1} dx = 0 \end{aligned}$$

Tenant compte de la monotonie de F_1 selon S et appliquant l'inégalité de Young à l'avant dernière intégrale on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[|u^{K+1}|^2 - |u^K|^2 + \left| u^{K+\frac{1}{2}} - u^K \right|^2 \right] + \tau_K |\nabla u^{K+1}|^2 \\ & \leq \tau_K^2 |F_1|_{\infty}^2 \frac{\text{mes}(\Omega)}{2} + \tau_K \int_{\Omega} \left| F_1 \left(x, S, \psi \right) - F_1 \left(x, S, \psi^{K+\frac{1}{2}} \right) \right| \left| u^{K+\frac{1}{2}} \right| dx \\ & \leq C \tau_K^2 + \tau_K L \int_{\Omega} \left| u^{K+1} \right| \left| v^{K+\frac{1}{2}} \right| dx \\ & \leq C \tau_K^2 + \tau_K L \left[\int_{\Omega} |u^{K+1}| |v^K| dx + \tau_K |G_1|_{\infty} \int_{\Omega} |u^{K+1}| dx \right] \end{aligned}$$

où L désigne une constante de Lipschitz de F_1 selon ψ et G_1 selon S, ψ .

En opérant de même avec les équations en ψ , sans hypothèse de monotonie cette fois, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[|v^{K+1}|^2 - |v^K|^2 + \left| v^{K+\frac{1}{2}} - v^K \right|^2 \right] + \tau_K |\nabla v^{K+1}|^2 \leq \\ & \leq \tau_K^2 |G_1|_{\infty}^2 \frac{\text{mes}(\Omega)}{2} + \tau_K \int_{\Omega} \left[L \left| u^{K+\frac{1}{2}} \right| + L \left| v^{K+\frac{1}{2}} \right| \right] |v^{K+1}| dx \\ & \leq \tau_K^2 C + \tau_K L \left[\int_{\Omega} |u^K| |v^{K+1}| dx + \tau_K |F_1|_{\infty} \int_{\Omega} |v^{K+1}| dx \right] + \\ & + \tau_K L \left[\int_{\Omega} |v^K| |v^{K+1}| dx + \tau_K |G_1|_{\infty} \int_{\Omega} |v^{K+1}| dx \right] \end{aligned}$$

En appliquant les inégalités d'Young et de Poincaré on peut récrire les inégalités en u et v de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[|u^{K+1}|^2 - |u^K|^2 + \left| u^{K+\frac{1}{2}} - u^K \right|^2 \right] + \tau_K C |u^{K+1}|^2 \leq \\ & \leq C \tau_K^2 + \frac{\tau_K}{2} L |v^K|^2 + \frac{\tau_K L + \tau_K^2 L |G_1|_\infty}{2} |u^{K+1}|^2 \\ & \frac{1}{2} \left[|v^{K+1}|^2 - |v^K|^2 + \left| v^{K+\frac{1}{2}} - v^K \right|^2 \right] + \tau_K C |v^{K+1}|^2 \leq \\ & \leq C \tau_K^2 + \frac{\tau_K}{2} L |u^K|^2 + \tau_K \frac{L}{2} |v^{K+1}|^2 + \tau_K^2 C |v^{K+1}|^2 \\ & + \frac{\tau_K L}{2} |v^K|^2 + \frac{\tau_K}{2} L |v^{K+1}|^2 + \tau_K^2 C |v^{K+1}|^2 \end{aligned}$$

Donc si la constante L est assez petite, ainsi que τ_K :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[|u^{K+1}|^2 - |u^K|^2 \right] + \tau_K \frac{C_3}{2} |u^{K+1}|^2 \leq \tau_K^2 C_1 + \frac{\tau_K}{2} L |v^K|^2 \\ & \frac{1}{2} \left[|v^{K+1}|^2 - |v^K|^2 \right] + \tau_K \frac{C_4}{2} |v^{K+1}|^2 \leq C_2 \tau_K^2 + \frac{\tau_K L}{2} |u^K|^2 + \frac{\tau_K L}{2} |v^K|^2 \end{aligned}$$

On pose $|w^K|^2 = |u^K|^2 + |v^K|^2$; $|w^K|$ vérifie la récurrence suivante,

avec $C = 2\max(C_1, C_2)$, $C' = \min(C_3, C_4)$, $C'' = 2L$;

$$(1 + \tau_K C') |w^{K+1}|^2 \leq (1 + \tau_K C'') |w^K|^2 + C \tau_K^2$$

On suppose L assez petite pour que $C'' < C'$ et on prend une suite τ_K décroissante; de l'inégalité ci-dessus on déduit que

$$\frac{1 + \tau_K C'}{1 + \tau_K C''} |w^{K+1}|^2 \leq |w^K|^2 + C \tau_K^2$$

en multipliant par $\left(\frac{1 + \tau_K C'}{1 + \tau_K C''} \right)^K$ et en notant que :

$$\alpha_K = \frac{1 + \tau_K C'}{1 + \tau_K C''} \geq \frac{1 + \tau_{K+1} C'}{1 + \tau_{K+1} C''}$$

pour une suite décroissante puis en faisant la somme de ces inégalités pour $0, \dots, K-1$ on obtient :

$$|w^K|^2 \leq \frac{|w^0|^2}{(\alpha_K)^K} + C \sum_{j=0}^{K-1} \tau_j^2 \frac{(\alpha_j)^j}{(\alpha_K)^K}$$

Le premier terme tend vers 0 d'après (ii) (et $C' > C''$), le deuxième terme est

majoré par $\frac{C}{(\alpha_K)^K} \sum_{j=0}^{K-1} \tau_j^2 e^{j \tau_j (C' - C'')} \equiv$ équivalent à

$$C \sum_{j=0}^{K-1} \tau_j^2 e^{(j \tau_j - K \tau_K) (C' - C'')} \quad \text{qui tend vers 0, d'après (ii) et (iii)}$$

d'où le résultat.

Pour la convergence de $S^{K+\frac{1}{2}}$, $\psi^{K+\frac{1}{2}}$ il suffit de conserver les termes $|u^{K+\frac{1}{2}} - u^K|^2 \dots$ et d'en faire la somme ■

IV-3 Le problème physique en dimension 1.

Les méthodes des §IV-1 ou IV-2 ne s'appliquent pas car D dépend de θ .

On va mettre en oeuvre une méthode de suites alternées: On considère

le système suivant avec $\eta > 0$ ou < 0 selon que la réaction est exo-ou endothermique

$$(IV-13) \quad \begin{cases} - (D(\theta)S_x)_x + F(x,S,\theta) = 0 \\ - (\Lambda(\theta)\theta_x)_x - \eta F(x,S,\theta) = 0 \\ S(0) = S(e) = S_0; \quad \theta(0) = \theta(e) = \theta_0 \end{cases} \quad 0 < x < e$$

avec $D(\theta) \geq \alpha > 0$, $\Lambda(\theta) \geq \alpha > 0$, D et Λ continues, F et G de Carathéodory, bornées, $F(x,S,\theta) = SH(x,S,\theta)$ avec $H \geq 0$ sur $\Sigma = [0, S_0] \times [\theta_0, \infty[$ ou $[0, S_0] \times [0, \theta_0]$ selon que η est > 0 ou < 0 .

Une combinaison des équations (IV-13) permet alors d'éliminer la fonction S , en effet :

$$(\eta D(\theta)S_x)_x + (\Lambda(\theta)\theta_x)_x = 0 \implies$$

$$\eta D(\theta)S_x + \Lambda(\theta)\theta_x = c^{te} \implies S_x + \frac{\Lambda(\theta)}{\eta D(\theta)} \theta_x = \frac{c^{te}}{D(\theta)}.$$

L'intégration de cette relation, compte tenu du fait que $S(e) = S(0)$,

$\theta(e) = \theta(0)$, donc alors :

$$c^{te} \int_0^e \frac{dx}{D(\theta(x))} = 0 \implies c^{te} = 0.$$

Par conséquent, si on pose :

$$\psi(z) = - \int_{\theta_0}^z \frac{\Lambda(t)}{\eta D(t)} dt$$

le système (IV-13) est équivalent au suivant :

$$(IV-14) \quad \begin{cases} S(x) = S_0 + \psi[\theta(x)] \\ - (\Lambda(\theta)\theta_x)_x - \eta F(x,S,\theta) = 0 \\ \theta(0) = \theta(e) = \theta_0 \end{cases}$$

ou encore, en posant : $\beta(z) = \int_{\theta_0}^z \Lambda(t) dt$

$$(IV-15) \begin{cases} S(x) = S_0 + \psi[\theta(x)] \\ -(\beta(\theta))_{xx} - \eta F(x, S, \theta) = 0 \\ \theta(0) = \theta(e) = \theta_0 \end{cases}$$

qui peut aussi se mettre sous la forme :

$$(IV-16) \begin{cases} -\Theta_{xx} - \eta \mathcal{F}(x, \Theta) = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(e) = 0 \end{cases}$$

avec $\mathcal{F}(x, \Theta) = F(x, S_0 + \psi[\beta^{-1}(\Theta)], \beta^{-1}(\Theta))$

(on a posé $\Theta(x) = \beta(\theta(x))$).

Observons maintenant le comportement de \mathcal{F} selon Θ :

a) cas exothermique ($\eta > 0$) avec F / en S et \ en θ (cf. tableau donné antérieurement) : ψ est \ en θ et donc \mathcal{F} est \ en Θ et $-\eta \mathcal{F}$ est / en Θ .

b) cas endothermique ($\eta < 0$), F est toujours / en S et θ :

ψ est / en θ donc \mathcal{F} est / en Θ et $-\eta \mathcal{F}$ est / en Θ

D'autre part \mathcal{F} étant bornée est continue de $L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ (*) l'équation

(IV-16) est donc associée à un opérateur coercif monotone, borné, hémicontinu de $H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ d'où par application directe d'un théorème classique de monotonie ([63]) (**)

(*) en tant qu'opérateur de Nemytskii.

(**) sans hypothèse de monotonie on obtient un résultat d'existence pour (IV-16) par compacité.

Théorème IV-7 : sous l'une des hypothèses a) ou b) ci-dessus le problème (IV-16) admet une unique solution. Il en est donc de même du problème initial équivalent (IV-13).

Pour l'approximation numérique (et pour l'existence!) on peut considérer l'algorithme itératif simple suivant :

$$(IV-17) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Theta_{xx}^{K+1} - \eta \mathcal{F}(x, \Theta^K) = 0 \\ \Theta^{K+1} \in H_0^1(\Omega) \\ \Theta^0 = 0 \end{array} \right.$$

Le système (IV-17) possède une unique solution $\Theta^{K+1} \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$. De plus $\mathcal{F}(x, \Theta^0) = F(x, S_0, \theta_0) \geq 0$, donc $\Theta^1 \geq \Theta^0 = 0$ dans le cas exothermique et $\Theta^1 \leq \Theta^0$ dans le cas endothermique. On se limite au cas a) pour le moment :

$$-\Theta_{xx}^2 = \eta \mathcal{F}(x, \Theta^1) \leq \eta \mathcal{F}(x, \Theta^0) = -\Theta_{xx}^1$$

ce qui implique $\Theta^2 \leq \Theta^1$ et $\Theta^2 \geq 0$.

Plus généralement, l'application $\Theta \rightarrow S\Theta$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} -(S\Theta)_{xx} - \eta \mathcal{F}(x, \Theta) = 0 \\ S\Theta \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$

est décroissante (ponctuellement) : $\Theta^1 \leq \Theta^2 \Rightarrow S\Theta^1 \geq S\Theta^2$.

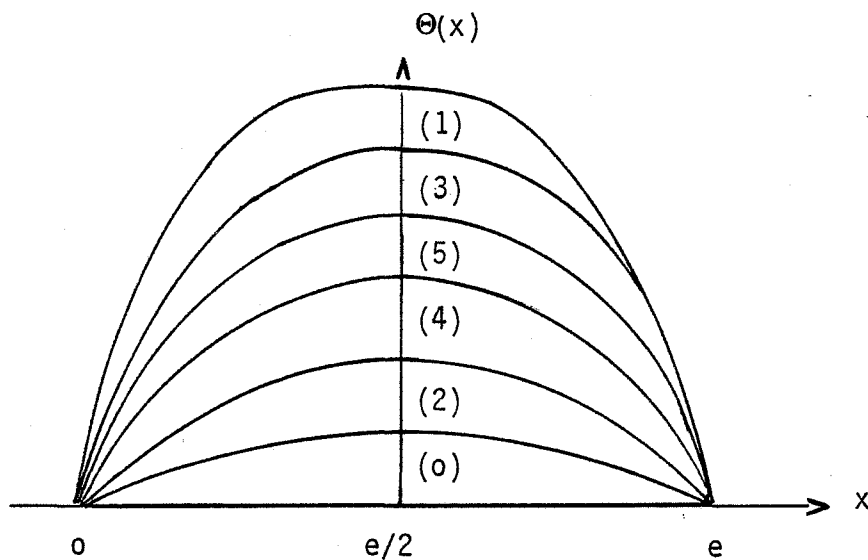
De la relation : $\Theta^0 = 0 \leq \Theta^2$ on déduit que la suite Θ^{2p} est / ,

la suite Θ^{2p+1} est \ , puis de la relation $\Theta^0 \leq \Theta^1$, on déduit que :

$$\Theta^{2p} \leq \Theta^{2p+1} \quad \text{d'où en fait deux suites :}$$

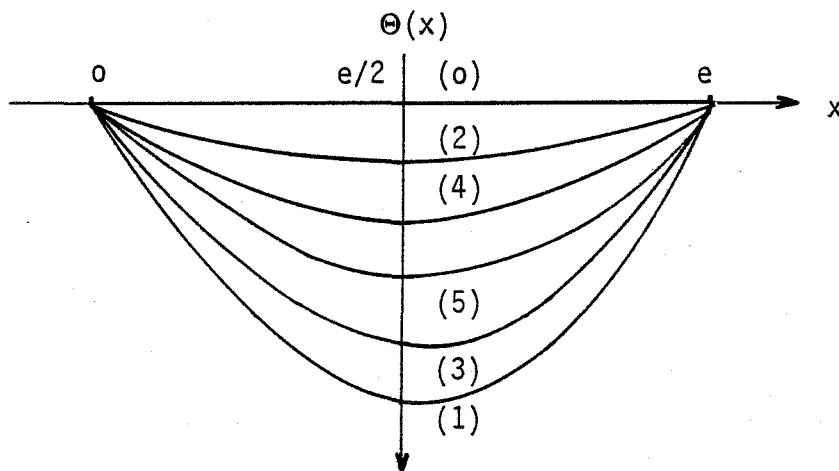
$$\Theta^{2p}, \Theta^{2p+1} \setminus \text{ avec } \Theta^{2i} \leq \Theta^{2j+1} \quad \forall i, j$$

ce qui donne la configuration suivante :



Dans le cas b) on obtient $\Theta^1 \leq \Theta^0 = 0$

et $\eta \mathcal{F}(x, \Theta^1) \geq \eta \mathcal{F}(x, \Theta^0) = \eta F(x, S^0, \Theta^0) \leq 0$ donc $\Theta^2 \leq \Theta^0$ et on a la configuration ci-dessous :



Dans ces cas, il est facile de montrer la convergence des suites :

Par exemple dans le cadre exothermique : $\Theta^{2p} / \underline{\Theta}, \Theta^{2p+1} \setminus \bar{\Theta} \geq \underline{\Theta}$ et
 en fait toute solution Θ du problème donné vérifie $\underline{\Theta} \leq \Theta \leq \bar{\Theta}$;

en effet, d'après la monotonie de $-\eta \mathcal{F}(x, \cdot)$, on a $0 \leq \underline{\Theta} \leq \Theta_1$
ce qui, par application répétée de l'opérateur S donne $\Theta^{2p} \leq \underline{\Theta} \leq \Theta^{2p+1}$,
puis on passe à la limite. D'autre part, $\underline{\Theta}$ (resp. $\bar{\Theta}$) est une sous-
(resp. sur-) solution du problème : en effet, puisque Θ^K est bornée dans
 $H_0^1(\Omega)$ on peut, par extraction et passage à la limite, en déduire comme
d'habitude que $\underline{\Theta}, \bar{\Theta} \in H_0^1(\Omega)$ vérifient :

$$\begin{cases} -\Delta \underline{\Theta} - \eta \mathcal{F}(x, \bar{\Theta}) = 0 \\ -\Delta \bar{\Theta} - \eta \mathcal{F}(x, \underline{\Theta}) = 0 \\ \underline{\Theta}, \bar{\Theta} \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

ce qui, vu la croissance de $-\eta \mathcal{F}$, donne les inégalités :

$$\begin{aligned} -\Delta \underline{\Theta} - \eta \mathcal{F}(x, \underline{\Theta}) &\leq 0 \\ -\Delta \bar{\Theta} - \eta \mathcal{F}(x, \bar{\Theta}) &\geq 0 \end{aligned}$$

Mais a priori $\underline{\Theta}$ et $\bar{\Theta}$ ne sont pas égaux! Toutefois lorsque η est
assez petit et \mathcal{F} Lipschitzienne (ce qui est conforme au modèle "physique")
 S est une contraction, donc $\underline{\Theta} = \bar{\Theta}$ et on a une convergence alternée vers
la solution. Si on revient aux variables (S, θ) , on peut formuler les résul-
tats de la manière suivante :

Proposition IV-8 : on se place dans l'hypothèse a) (resp. b)) et on
considère la méthode itérative suivante ($K \geq 0$) :

$$\begin{cases} \theta^0 = 0 \\ -(D(\theta^K) S_x^K)_x = \frac{1}{\eta} (\Lambda(\theta^K) \theta_x^K)_x \\ S^K(o) = S^K(e) = S_0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} - (\Lambda(\theta^{K+1}) \theta_x^{K+1})_x - \eta F(x, S^K, \theta^K) = 0 \\ \theta^{K+1}(0) = \theta^{K+1}(e) = \theta_0. \end{array} \right.$$

On a les convergences suivantes :

$\theta^{2p} / \underline{\theta}, S^{2p} \setminus \bar{S}, \theta^{2p+1} \setminus \bar{\theta}, S^{2p+1} / \underline{S}$. Pour η assez petit, $(\underline{S}, \underline{\theta}) = (\bar{S}, \bar{\theta})$ est l'unique solution (S, θ) de (IV-13). On a toujours $0 \leq \underline{S} \leq S \leq \bar{S} \leq S_0$ et $\underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}$ et de plus $(\bar{S}, \bar{\theta})$ et $(\underline{S}, \underline{\theta})$, resp. $(\underline{S}, \underline{\theta})$ (et $\bar{S}, \bar{\theta}$) sont sur-resp. sous- solution de l'équation (IV-13) en θ et $(\bar{S}, \underline{\theta})$ resp. $(\underline{S}, \bar{\theta})$ sont sur- resp. sous-solution de l'équation (IV-13) en S .

On a un énoncé analogue dans le cas endothermique en échangeant les symboles / et \ .

V. - ETUDE NUMERIQUE DU PROBLEME PHYSIQUE.

Pour des problèmes quasi-linéaires du type $Lu + f(x, u) = 0$ avec L opérateur linéaire du second ordre (ou pour des systèmes de ce type) la méthode de linéarisation proposée par Cea et Geymonat ([28]) est bien adaptée. Rappelons en le principe : soit à résoudre l'équation

(V-1) $A(u) = f$ avec A opérateur non linéaire continu d'un Hilbert V dans son dual V' , f donné dans V' . On suppose que A admet le découpage "additif" suivant : $Au = Cu - B(u)$ avec C linéaire continu de V dans V' .

On associe à (V-1) le problème de type contrôle optimal :

$$(V-2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} Cu_\lambda = B(\lambda) + f & (\text{équation d'état}) \\ \inf_{\lambda \in V} J(\lambda) \text{ avec } J(\lambda) = \|u_\lambda - \lambda\|_V^2 & (J \text{ est la fonction coût}) \end{array} \right.$$

qu'on résout par des méthodes itératives d'optimisation. Sous des hypothèses raisonnables ([28]) on montre que (V-1) équivaut à (V-2) et qu'un algorithme de type gradient converge.

Dans notre cas, la non-linéarité affecte le terme de dérivation d'ordre deux, de sorte qu'il n'y a pas de décomposition additive naturelle du type C - B. L'idée consiste à linéariser l'opérateur :

$$- \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[a_{ij}(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right] + g(x,u), \text{ par exemple, en introduisant}$$

l'opérateur :

$$- \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[a_{ij}(x,\lambda) \right] \frac{\partial u}{\partial x_i} + g(x,\lambda), \lambda \text{ étant supposé connu.}$$

On va formaliser ce procédé qui apparaît bien comme une extension de [28], puis l'appliquer au problème physique unidimensionnel (il est bien entendu possible de l'appliquer au problème général du § III).

V-1. Une méthode générale de contrôle optimal.

On reprend les notations de [28] : V, espace de Hilbert, est muni du produit scalaire $((,))$, de la norme $\| \cdot \|_V$, V' son dual normé par $\| \cdot \|_{V'}$, la dualité entre V et V' est représentée par le crochet $< , >$.

Soit à résoudre (V-1) $A(u) = f$ avec $A : V \rightarrow V'$ non linéaire continu, $f \in V'$ donné.

On suppose que A peut se mettre sous la forme :

$A(u) = C(u,u) - B(u)$, où $C(u,\lambda)$ est, à $\lambda \in V$ fixé, linéaire de V dans V' .

a) Définition du problème de contrôle :

on fait les hypothèses suivantes :

- (i) $(u, \lambda) \in V \times V \longrightarrow C(u, \lambda) \in V'$ est continue
 (ii) $\lambda \in V \longrightarrow B(\lambda) \in V'$ est continue
 (iii) $\exists \alpha > 0$ tel que : $\langle C(u-v, \lambda), u-v \rangle \geq \alpha \|u-v\|_V^2$
 $\forall u, v \in V, \forall \lambda \in V$

Lemme V-1 : quels que soient $\lambda \in V, f \in V'$, l'équation $C(u, \lambda) - B(\lambda) = f$ admet une unique solution $u_\lambda \in V$ dépendant continûment de λ et f .

Preuve : l'équation s'écrit : $C(u, \lambda) = f + B(\lambda) \in V'$ pour un opérateur linéaire, continu, coercif, d'où l'existence et l'unicité. Pour la continuité on considère les deux équations :

$$\begin{aligned} C(u, \lambda) &= f + B(\lambda) \\ C(v, \mu) &= g + B(\mu) \end{aligned} \quad \text{et par différence, on obtient :}$$

$$C(u-v, \lambda) = f-g + B(\lambda) - B(\mu) + C(v, \mu) - C(v, \lambda)$$

on applique ces formes à $u - v \in V$ et on utilise (iii) :

$$\|u-v\|_V \leq \|f-g\|_{V'} + \|B(\lambda) - B(\mu)\|_{V'} + \|C(v, \lambda) - C(v, \mu)\|_{V'} \quad \blacksquare$$

On peut alors considérer le problème de contrôle optimal

$$(V-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \inf_{\lambda \in V} J(\lambda), \text{ avec } J(\lambda) = \frac{1}{2} \|u_\lambda - \lambda\|_V^2 \quad (\text{coût}) \\ u_\lambda \text{ étant la solution de l'équation d'état :} \\ C(u, \lambda) - B(\lambda) = f \end{array} \right.$$

La fonction coût est continue grâce au lemme V-1.

Toute solution u de (V-1) est solution de (V-2) avec $u = \lambda$ et toute solution $\hat{\lambda}$ de (V-2) telle que $J(\hat{\lambda}) = 0$ est une solution $\hat{\lambda} = u$ de (V-1).

b) Définition d'un état adjoint .

Pour un contrôle $\lambda \in V$ et l'état u_λ associé, on définit l'état adjoint $p \in V$ comme la solution de :

$$(V-3) \quad \langle C(\varphi, \lambda), p \rangle = ((u_\lambda - \lambda, \varphi)) \quad \forall \varphi \in V$$

La forme $(\varphi, p) \longrightarrow \langle C(\varphi, \lambda), p \rangle$ étant bilinéaire continue coercive sur V , (V-3) admet bien une solution unique.

On fait les hypothèses supplémentaires suivantes :

(iv) $(u, \lambda) \longrightarrow C(u, \lambda)$ est différentiable de $V \times V \longrightarrow V'$ (il n'y a rien à vérifier en ce qui concerne u !).

(v) $\lambda \longrightarrow B(\lambda)$ est différentiable de $V \longrightarrow V'$

(vi) $\exists \beta > 0$ tq $\forall \varphi \in V : \langle C(\varphi, \lambda), \varphi \rangle + \langle C_\lambda(u, \lambda)\varphi - B_\lambda(\lambda)\varphi, \varphi \rangle \geq \beta \|\varphi\|_V^2$.

Proposition V-1 sous les hypothèses (i) - (vi), $\lambda \in V$ est solution de (V-1) si et seulement si il existe $u \in V, p \in V$, tels que les conditions suivantes soient satisfaites :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (V-2) & C(u, \lambda) = B(\lambda) + f \\ (V-3) & \langle C(\varphi, \lambda), p \rangle = ((u - \lambda, \varphi)) \quad \forall \varphi \in V \\ (V-4) & ((u - \lambda, \varphi)) = - \langle C_\lambda(u, \lambda)\varphi - B_\lambda(\lambda)\varphi, p \rangle \quad \forall \varphi \in V \end{array} \right.$$

Preuve : Si λ est solution de (V-1) les relations (V-2-3-4) sont satisfaites avec $u = \lambda, p = 0$. Réciproquement, en additionnant (V-3) et (V-4) et en prenant $\varphi = p$ on obtient :

$\langle C(p, \lambda), p \rangle + \langle C_\lambda(u, \lambda)p - B_\lambda(\lambda)p, p \rangle = 0$ ce qui par (vi) donne $p = 0$ donc $u = \lambda$ par (V-3), et (V-2) donne alors $C(u, \lambda) - B(u) = A(u) = f$ ■

c) méthode numérique : elle va consister à minimiser $J(\lambda)$ en utilisant le gradient à chaque étape d'itération. On calcule d'abord ce gradient, $\nabla J(\lambda) \in V$.

Soient $\lambda, \lambda + \delta\lambda \in V$; $u, u + \delta u$ les états correspondants.

On a $C(u, \lambda) - B(\lambda) = f$

$$C(u + \delta u, \lambda + \delta\lambda) - B(\lambda + \delta\lambda) = f = \Phi(u + \delta u, \lambda + \delta\lambda)$$

Puisque $u \longrightarrow C(u, \lambda)$ est un isomorphisme de $V \longrightarrow V'$ on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à $\Phi : V \times V \longrightarrow V'$ au point (u, λ) ce qui donne :

$$\delta u = h(\delta\lambda) + o(\|\delta\lambda\|_V) \quad \text{où } h \in \mathcal{L}(V, V)$$

est défini de la façon suivante : $h = -\Phi_u^{-1}(u, \lambda) \Phi_\lambda(u, \lambda)$ i.e. $\forall w \in V$,

$Z = h(w)$ vérifie :

$$C(Z, \lambda) = - (C_\lambda(u, \lambda) - B_\lambda(\lambda)) \cdot w \quad \text{dans } V' \implies$$

$$(V-5) \quad \langle C(Z, \lambda), \varphi \rangle = \langle - (C_\lambda(u, \lambda) - B_\lambda(\lambda)) w, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in V.$$

On peut calculer alors $\nabla J(\lambda)$:

$$\begin{aligned} J(\lambda + \delta\lambda) - J(\lambda) &= \frac{1}{2} \|u + \delta u - (\lambda + \delta\lambda)\|_V^2 - \frac{1}{2} \|u - \lambda\|_V^2 \\ &= ((u - \lambda, \delta u)) - ((u - \lambda, \delta\lambda)) + \frac{1}{2} \|\delta u - \delta\lambda\|_V^2 \\ &= \langle C(\delta u, \lambda), p \rangle - ((u - \lambda, \delta\lambda)) + o(\|\delta\lambda\|_V) \quad (V-3 \text{ avec } \varphi = \delta u) \\ &= - \langle (C_\lambda(u, \lambda) - B_\lambda(\lambda)) \delta\lambda, p \rangle - ((u - \lambda, \delta\lambda)) + o(\|\delta\lambda\|_V) \end{aligned}$$

(on utilise (V-5) avec $w = \delta\lambda, \varphi = p$)

On introduit $K_\lambda \in V$ par la relation :

$$(V-6) \quad ((K_\lambda, \varphi)) = \langle (C_\lambda(u, \lambda) - B_\lambda(\lambda)) \varphi, p \rangle$$

ce qui donne : $\nabla J(\lambda) = - K_\lambda - (u - \lambda)$

On peut alors utiliser un algorithme itératif d'optimisation.

Proposition V-2 : On suppose que (i) - (viii) sont vérifiées.

Alors pour ρ assez petit, l'algorithme du gradient converge :

$u_n \longrightarrow u$, $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ dans V où u est l'unique solution de (V-1).

Preuve : pour l'unicité, on suppose qu'on a deux solutions u et v de (V-1)

et on fait la différence des deux équations donnant u et v :

$$C(u,u) - B(u) - [C(v,v) - B(v)] = 0 \quad \text{i.e.}$$

$$C(u-v, \lambda) + (C_\lambda(\lambda, \lambda) - B_\lambda(\lambda)) u-v = 0 \quad \text{avec } \lambda = \theta u + (1-\theta)v.$$

En appliquant cette relation à $u-v$ et en utilisant (vi) on obtient :

$$\|u-v\|_V = 0 \quad \text{i.e. } u = v.$$

Pour la convergence, on peut supposer $G_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

sans quoi le résultat est établi d'après la remarque 1.

♦ Supposons que $\nabla J : V \longrightarrow V$ soit Lipschitzienne de rapport C :

$$\begin{aligned} J(\lambda_n - \rho G_n) &= J(\lambda_n) - \rho((\nabla J(\lambda_n), G_n)) + \\ &\quad - \rho((\nabla J(\lambda_n - \rho \theta_n G_n) - \nabla J(\lambda_n), G_n)) \quad \text{avec } \theta_n \in (0,1) \\ &\leq J(\lambda_n) - \rho \|G_n\|_V^2 + C\rho^2 \|G_n\|_V^2 < J(\lambda_n) \quad \text{dès que } \rho < \frac{1}{C}; \end{aligned}$$

la suite $J(\lambda_n)$ sera donc décroissante et $J(\lambda_n) \geq 0$ donc $J(\lambda_n) \searrow \geq 0$.

Avec $\rho = \frac{1}{2C}$ on aura alors $\|G_n\|_V^2 \leq 4C[J(\lambda_n) - J(\lambda_{n+1})]$ donc $G_n \longrightarrow 0$.

♦ On montre ensuite que $p_n \longrightarrow 0$. Par définition,

$$((G_n, \varphi)) = -((K_n, \varphi)) - ((u_n - \lambda_n, \varphi)) \quad \text{et pour } \varphi = -p_n :$$

$$-((G_n, p_n)) = \langle (C_\lambda(u_n, \lambda_n) - B_\lambda(\lambda_n)) p_n, p_n \rangle + \langle C(p_n, \lambda_n), p_n \rangle$$

$$\text{d'après (vii)} \geq \beta \|p_n\|_V^2 \implies \|p_n\|_V \leq \frac{1}{\beta} \|G_n\| \longrightarrow 0 \quad \text{donc } p_n \longrightarrow 0$$

♦ On montre que $u_n - \lambda_n \longrightarrow 0$; on prend (V-3) avec $\varphi = u_n - \lambda_n$:

$$\|u_n - \lambda_n\|_V^2 \leq \|C(u_n - \lambda_n, \lambda_n)\|_V, \|p_n\|_V \leq \|C(\cdot, \lambda_n)\|_{\mathcal{L}(V, V')} \|u_n - \lambda_n\|_V \|p_n\|_V;$$

Par exemple, l'algorithme du gradient à pas constant s'écrit :

$n = 0, \lambda_0$ donné

- (1) Résoudre : $C(u, \lambda_n) = B(\lambda_n) + f$ (équation d'état) $\longrightarrow u_n$
- (2) Résoudre : $\langle C(\varphi, \lambda_n), p \rangle = ((u_n - \lambda_n, \varphi)) \forall \varphi \in V \longrightarrow p_n$ (état adjoint).
- (3) Résoudre : $((K_n, \varphi)) = \langle (C_\lambda(u_n, \lambda_n) - B_\lambda(\lambda_n))\varphi, p_n \rangle, \forall \varphi \in V \longrightarrow K_n$
- (4) $\nabla J_n = G_n = -K_n - (u_n - \lambda_n)$
Si $G_n = 0$ arrêt; sinon :
- (5) $\lambda_{n+1} = \lambda_n - \rho G_n$ ($\rho > 0$ à choisir)
poser $n = n+1$ et retourner en (1).

Remarque 1 : Si $G_n = 0$, alors $((u_n - \lambda_n, \varphi)) = -((K_n, \varphi))$
 $= -\langle (C_\lambda(u_n, \lambda_n) - B_\lambda(\lambda_n))\varphi, p_n \rangle$.

D'après la proposition V-1, $u_n = \lambda_n$ est alors solution de (V-1).

Remarque 2 : On peut remplacer (5) par n'importe quelle méthode en utilisant le gradient, par exemple gradient conjugué. C'est ce que nous ferons en pratique.

d) Convergence de l'algorithme du gradient.

On fait les deux hypothèses supplémentaires suivantes :

$$(vii) \quad |||C(\cdot, \lambda)|||_{\mathcal{L}(V, V')} \leq C^{te}; \quad |||C_\lambda(u, \lambda) - B_\lambda(\lambda)|||_{\mathcal{L}(V, V')} \leq C^{te}$$

$$(viii) \quad |||C(\cdot, \lambda) - C(\cdot, \mu)|||_{\mathcal{L}(V, V')} \leq \gamma \|\lambda - \mu\|_V$$

$$|||C_\lambda(u, \lambda) - C_\lambda(v, \mu) + B_\lambda(\lambda) - B_\lambda(\mu)|||_{\mathcal{L}(V, V')} \leq \gamma [\|u - v\|_V + \|\lambda - \mu\|_V]$$

ceci implique que $u_n - \lambda_n \longrightarrow 0$ ou encore $J(\lambda_n) \longrightarrow 0$.

♦ soit u la solution de (V-1) qui existe car $u \longrightarrow C(u,u) - B(u)$ est monotone (vi), continu ((i),(ii)) coercif((vi)) borné (vii) ([63])

Des égalités :

$$C(u,u) = B(u) + f$$

$$C(u_n, \lambda_n) = B(\lambda_n) + f$$

on déduit que : (avec $\lambda = \theta_n u + (1 - \theta_n) \lambda_n$, $\theta_n \in (0,1)$) :

$$C(u - u_n, \lambda) + (C_\lambda(u_n, \lambda) - B_\lambda(\lambda)) (u - \lambda_n) = 0 \implies$$

$$C(u - u_n, \lambda) + (C_\lambda(u_n, \lambda) - B_\lambda(\lambda))(u - u_n) = -(C_\lambda(u_n, \lambda) - B_\lambda(\lambda))(u_n - \lambda_n)$$

on applique les formes figurant aux deux membres sur $u - u_n$ et on utilise (vi) et (vii) :

$$\beta \|u - u_n\|_V^2 \leq \|C_\lambda(u_n, \lambda) - B_\lambda(\lambda)\|_{\mathcal{L}(V, V')} \|u_n - \lambda_n\|_V \|u - u_n\|_V$$

$\implies u - u_n \longrightarrow 0$. Le théorème sera définitivement établi si on prouve le :

Lemme V-2 : sous les hypothèses de la proposition (V-2) l'application $\nabla J : V \longrightarrow V$ est Lipschitzienne.

Preuve : on a $\nabla J(\lambda) = -K_\lambda - (u - \lambda)$, il suffit de montrer que $\lambda \longrightarrow u$ et $\lambda \longrightarrow K_\lambda$ sont Lipschitziennes :

• On a $C(u, \lambda) - C(v, \mu) = B(\lambda) - B(\mu)$ si u et v sont les états associés aux contrôles λ et $\mu \implies C(u-v, \lambda) = C(v, \mu) - B(\mu) - [C(v, \lambda) - B(\lambda)]$

$$= (C_\lambda(v, \hat{\lambda}) - B_\lambda(\hat{\lambda}))(\mu - \lambda) \implies$$

$$\begin{aligned} \|u - v\| &\leq \frac{1}{\alpha} \|C_\lambda(v, \hat{\lambda}) - B_\lambda(\hat{\lambda})\|_{\mathcal{L}(V, V')} \|\mu - \lambda\|_V \\ &\leq C^{te} \|\mu - \lambda\|_V \text{ par (viii).} \end{aligned}$$

• L'état adjoint est fonction Lipschitzienne du contrôle :

$$\langle C(\varphi, \lambda), p \rangle = ((u - \lambda, \varphi))$$

$$\langle C(\varphi, \mu), q \rangle = ((v - \mu, \varphi)) \implies$$

$$\langle C(\varphi, \lambda), p-q \rangle = \langle C(\varphi, \mu) - C(\varphi, \lambda), q \rangle + \langle u-v + \mu-\lambda, \varphi \rangle$$

on prend $\varphi = p-q$ et on utilise (iii) et viii) :

$$\|p-q\| \leq C^{te} \|\mu-\lambda\|_V \|q\|_V + C^{te} \|\mu-\lambda\|_V$$

et comme $\langle C(q, \lambda)q \rangle = ((u_\lambda - \lambda, q))$, on a $\|q\|_V \leq C^{te} J(\lambda) \leq C^{te} J(\lambda_0)$

donc q est borné dans V ce qui suffit :

• $\lambda \longrightarrow K_\lambda$ est lipschitzienne : on a

$$\begin{aligned} ((K_\lambda - K_\mu, \varphi)) &= \langle (C_\lambda(u, \lambda) - B_\lambda(\lambda) - C_\mu(v, \mu) + B_\mu(\mu))\varphi, p \rangle + \\ &+ \langle (C_\mu(v, \mu) - B_\mu(\mu))\varphi, p-q \rangle \end{aligned}$$

et on applique encore (vii), (viii) en prenant $\varphi = K_\lambda - K_\mu$ et en utilisant le caractère Lipschitzien du contrôle ce qui donne le résultat ■

Remarque : les hypothèses (vii) et (viii) sont à vérifier uniquement sur un ensemble convexe de $V \times V$ contenant $\{(u, \lambda) / J(\lambda) \leq J(\lambda_0)\}$

V-2. Mise en oeuvre sur le système couplé.

On récrit le système (II-1) en posant $S = S_0 + u$, $\theta = \theta_0 + v$,

$$D_{ij}(x, S, \theta) = \tilde{D}_{ij}(x, u, v), \quad \Lambda_{ij}(x, S, \theta) = \tilde{\Lambda}_{ij}(x, u, v),$$

$$F(x, S, \theta) = F(x, u, v), \quad G(x, S, \theta) = G(x, u, v) :$$

$$\begin{cases} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\tilde{D}_{ij}(x, u, v) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] + \tilde{F}(x, u, v) = 0 \\ - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\tilde{\Lambda}_{ij}(x, u, v) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right] + \tilde{G}(x, u, v) = 0 \\ \forall u, v \in H_0^1(\Omega) \quad ((H_0^1(\Omega))' = H^{-1}(\Omega)) \end{cases}$$

Pour $w_1, w_2 \in H_0^1(\Omega)$, on pose $((w_1, w_2)) = \int_{\Omega} \nabla w_1, \nabla w_2 \, dx$

Si $g = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega)$, $g_i \in L^2(\Omega)$

on pose

$$\langle g, w \rangle = \sum_{i=1}^n \left(g_i, \frac{\partial w}{\partial x_i} \right), \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Les étapes de la méthode de contrôle optimal s'écrivent de la façon suivante, avec $V = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, sous forme faible :

Equation d'état :

Soit (λ, μ) un contrôle; (u, v) est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i,j=1}^n \left(\tilde{D}_{ij}(x, \lambda, \mu) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + (\tilde{F}(x, \lambda, \mu), \varphi) = 0 \\ \sum_{i,j=1}^n \left(\tilde{\Lambda}_{ij}(x, \lambda, \mu) \frac{\partial v}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + (\tilde{G}(x, \lambda, \mu), \varphi) = 0 \\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega); u, v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Etat adjoint : (p, q) est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i,j=1}^n \left(\tilde{D}_{ij}(x, \lambda, \mu) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (u - \lambda), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \\ \sum_{i,j=1}^n \left(\tilde{\Lambda}_{ij}(x, \lambda, \mu) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \frac{\partial q}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (v - \mu), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega); p, q \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$

Calcul du gradient du coût : $J(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} \|u - \mu\|^2 + \frac{1}{2} \|v - \mu\|^2$

On détermine K_1, K_2 solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial K_1}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \tilde{D}_{ij}(x, \lambda, \mu) \varphi \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) + \\ \quad + \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \tilde{\Lambda}_{ij}(x, \lambda, \mu) \varphi \frac{\partial v}{\partial x_j}, \frac{\partial q}{\partial x_i} \right) \\ \quad + \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda}(x, \lambda, \mu) \varphi, p \right) + \left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \lambda}(x, \lambda, \mu) \varphi, q \right) \\ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial K_2}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial \mu} \tilde{D}_{ij} \dots \text{on remplace } \frac{\partial}{\partial \lambda} \text{ par } \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \\ K_1, K_2 \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$

$$\nabla J(\lambda, \mu) = - (K_1, K_2) - (u - \lambda, v - \mu)$$

On peut évidemment écrire ces systèmes sous forme opérationnelle, mais étant donné que l'approximation se fera par éléments finis, l'écriture ci-dessus est bien adaptée.

V - 3 Résultats numériques sur le problème physique

$$(V-7) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \left(D(\theta) S_x \right)_x + e^2 \frac{V_m(\theta) S}{K_m(\theta) + S} = 0 \\ - \left(\Lambda(\theta) \theta_x \right)_x - \Delta H e^2 \frac{V_m(\theta) S}{K_m(\theta) + S} = 0 \\ S(0) = S(1) = S_0; \quad \theta(0) = \theta(1) = \theta_0 \end{array} \right. \quad 0 < x < 1$$

Nous avons appliqué la méthode exposée en V - 2 à ceci près que pour respecter la positivité en S , la première équation a été linéarisée en introduisant le contrôle dans le terme $\frac{V_m(\theta) S}{K_m(\theta) + S}$ uniquement au dénominateur, avec, comme d'habitude des variables vérifiant des conditions homogènes au bord. L'approximation numérique a été faite au moyen d'éléments finis P_1 , avec un maillage régulier de $[0,1]$ en utilisant 180 points.

La méthode d'optimisation utilisée est celle du gradient conjugué, version Polak-Ribière, avec calcul "optimal" du pas, comme par exemple dans [60] où elle a été mise en oeuvre dans le cadre d'une méthode de contrôle classique.

Rappelons l'expression des fonctions intervenant dans (V-7) :

$$\begin{aligned} D(\theta) &= D_0 e^{-\frac{E}{R\theta}} & \Lambda(\theta) &= \Lambda_0 (1 + b\theta) \\ V_m(\theta) &= V_0 e^{-\frac{E'}{R\theta}} & K_m(\theta) &= K_0 e^{-\frac{\Delta H}{R\theta}} \end{aligned}$$

Les valeurs numériques sont les suivantes ([7]) :

$$\begin{aligned}
 D_0 &= 1.726 \quad 10^{15} & ; & \quad E = 3.0 \quad 10^4 \\
 \Lambda_0 &= 2.12 \quad 10^{-3} & ; & \quad b = 0.02 \\
 V_0 &= 448 & ; & \quad E' = 0 \\
 K_0 &= 1.767 \quad 10^{17} & ; & \quad \Delta H = 2.344 \quad 10^4
 \end{aligned}$$

$e = 0.004$; $R = 2$; $\theta_0 = 273 + 21 = 294$; S_0 peut varier de 1 à 10.

Rappelons que, puisque $E' = 0$ et $\Delta H > 0$, on a unicité de la solution (Théorème IV-7 cas a)).

Pour $\theta = \theta_0$ les valeurs des coefficients $D(\theta_0)$, $V_m(\theta_0)$ sont celles qui sont utilisées dans le modèle standard à coefficients constants :

$$(V-8) \quad \left\{ \begin{array}{ll} - D S_{xx} + e^2 \frac{V_m S}{K_m + S} = 0 & 0 < x < 1 \\ - \Lambda \theta_{xx} - \Delta H e^2 \frac{V_m S}{K_m + S} = 0 & 0 < x < 1 \\ S(0) = S(1) = S_0; \theta(0) = \theta(1) = \theta_0 \end{array} \right.$$

Nous avons fait des essais numériques, d'abord avec les données ci-dessus en faisant varier S_0 , puis en considérant ΔH comme un paramètre de bifurcation (la valeur indiquée sur les figures est le coefficient multiplicatif). Les résultats et conclusions sont les suivants :

a) intérêt du modèle à coefficients variables (fig.1)

Pour les données physiques, le modèle à coefficients constants donne les mêmes résultats que le modèle à coefficients variables (dit "couplé");

il faut que ΔH soit nettement plus grand pour que les différences soient sensibles.

b) évolution de la température en fonction de ΔH : (fig. 2 - 3) :

on observe une montée en température brutale autour d'un certain seuil.

Pour ΔH plus grand (>5) on obtient un comportement qui ne dépend plus de S_0 (fig. 6) .

c) évolution de la concentration en fonction de ΔH (fig. 4 - 5) :

On observe trois zones :

- pour ΔH petit une zone où $S \simeq S_0$
- un passage brutal à une zone frontière libre numérique ($S_{\min} \simeq 0$)
à peu près indépendant de S_0
- enfin une convergence lorsque $\Delta H \rightarrow \infty$ vers une solution > 0 , cette convergence et aussi la transition entre la zone frontière libre et la zone de remontée se faisant d'autant plus vite que S_0 est grand (fig. 8 - 9).

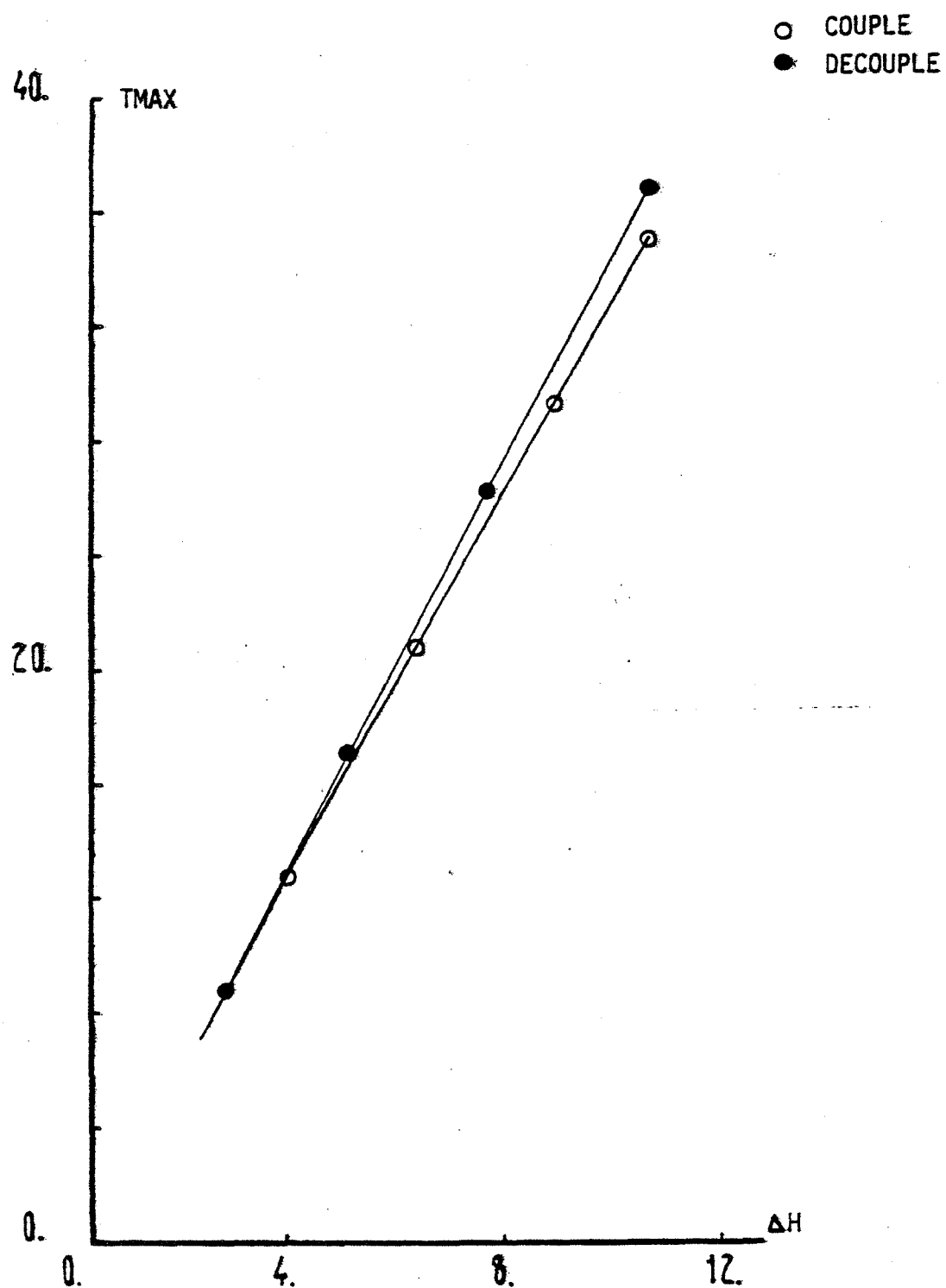


Figure 1 : Température au centre de la membrane en fonction de ΔH pour les modèles à coefficients variables (couplé) et constants (découplé) .

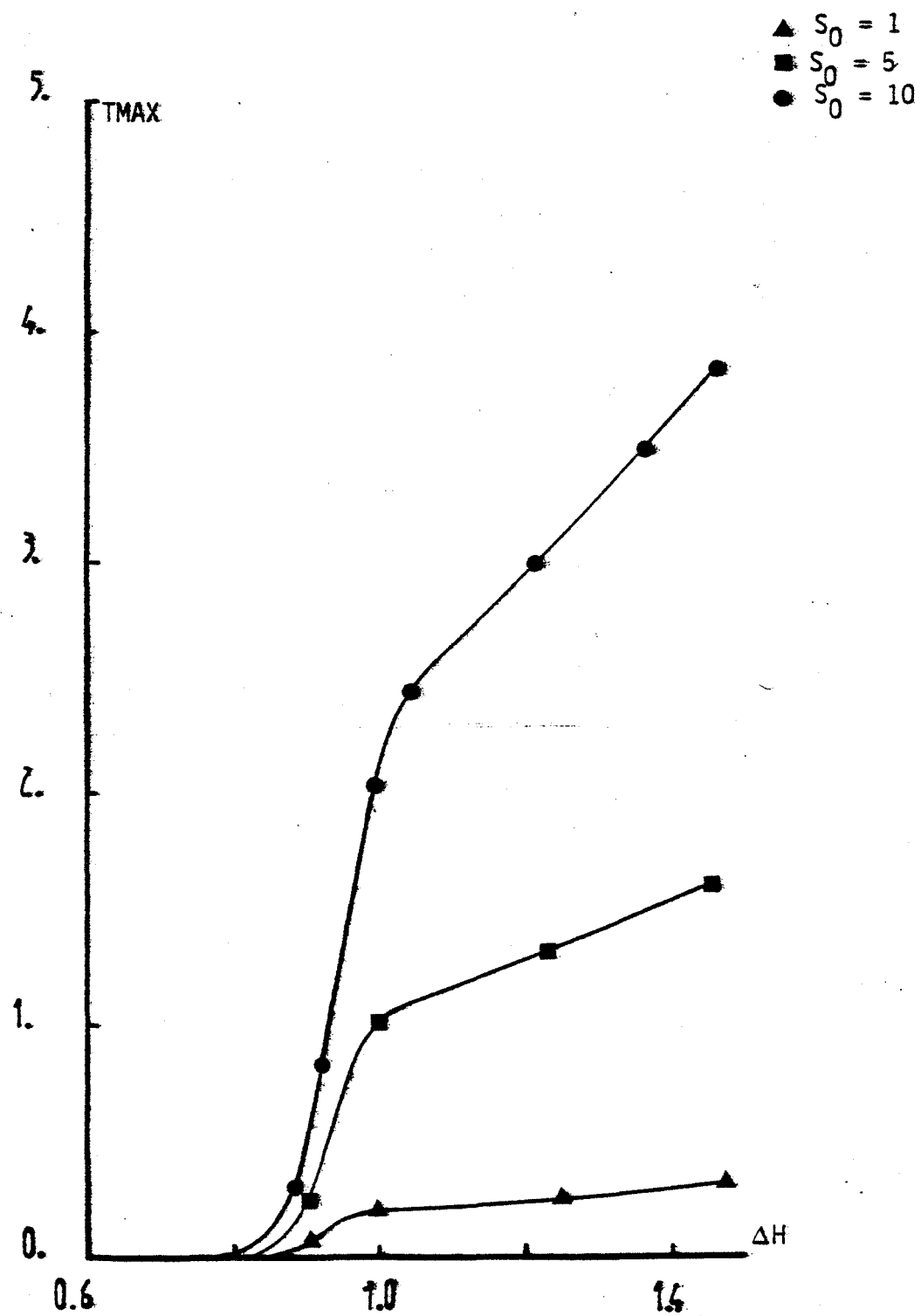


Figure 2 : Evolution de la température en fonction de ΔH pour diverses valeurs de S_0

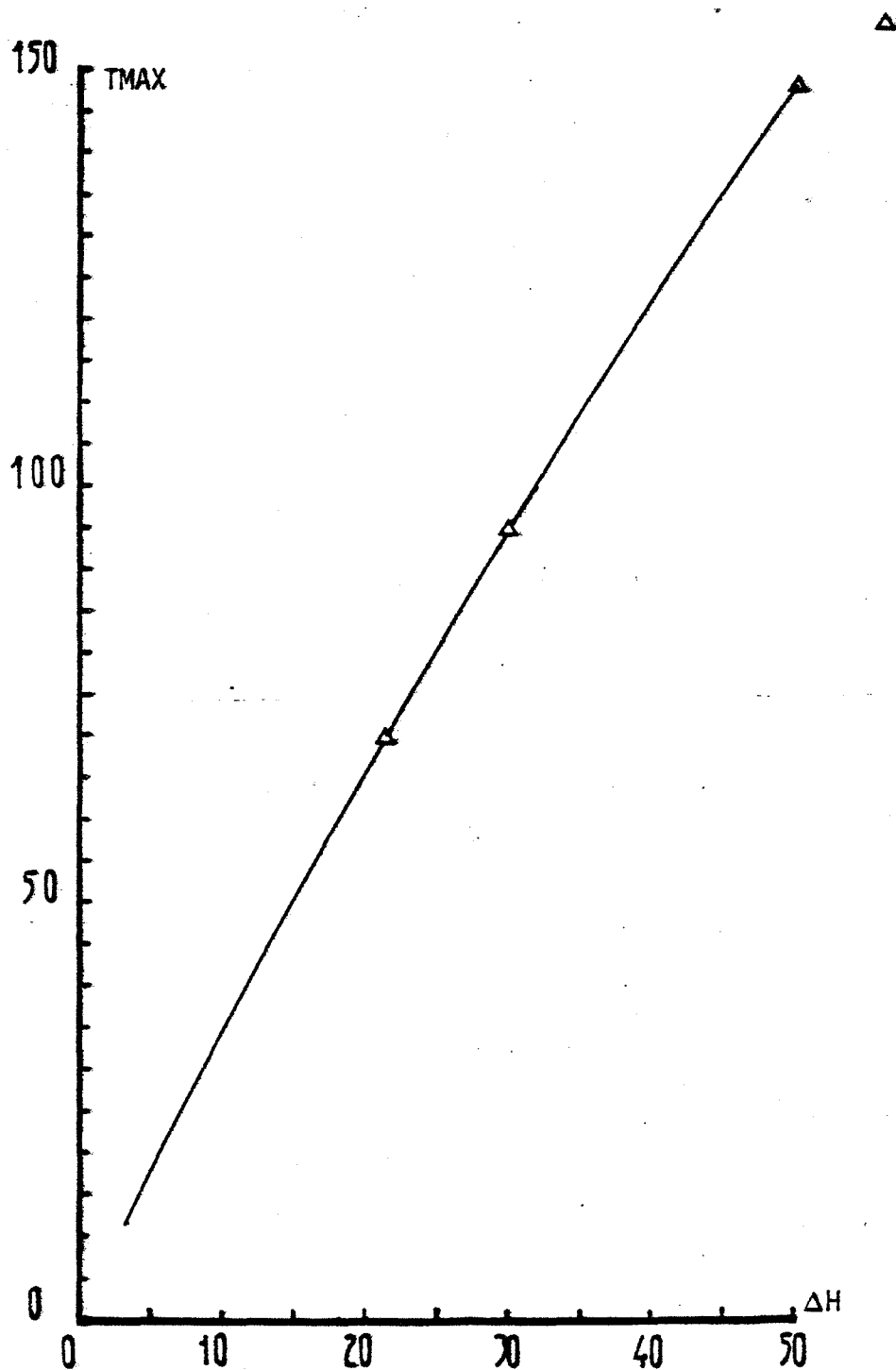
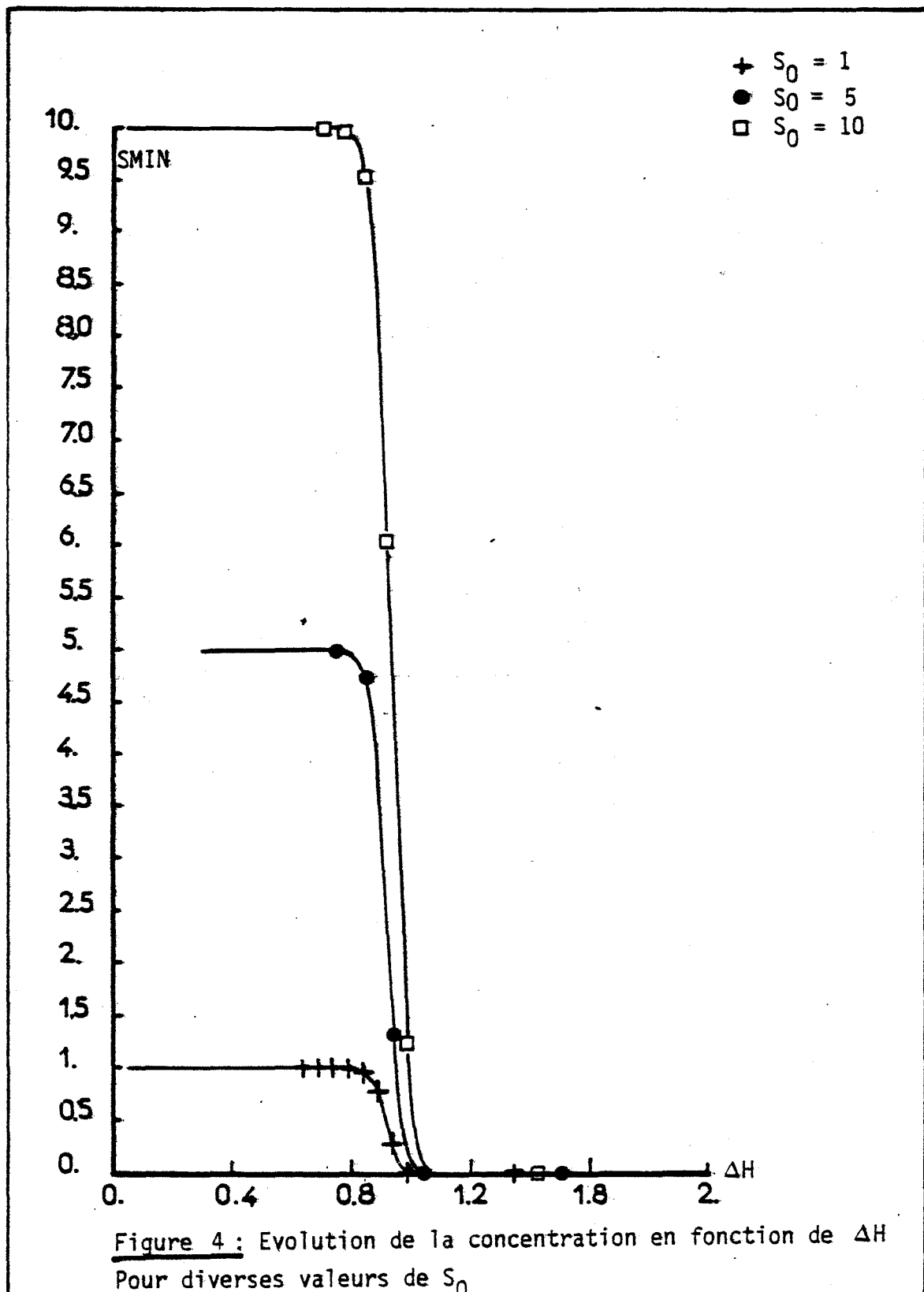


Figure 3 : Evolution de la température en fonction de ΔH pour $S_0 = 5$, avec ΔH grand. Pour $S_0 = 1$ ou 10 , on a exactement la même courbe.



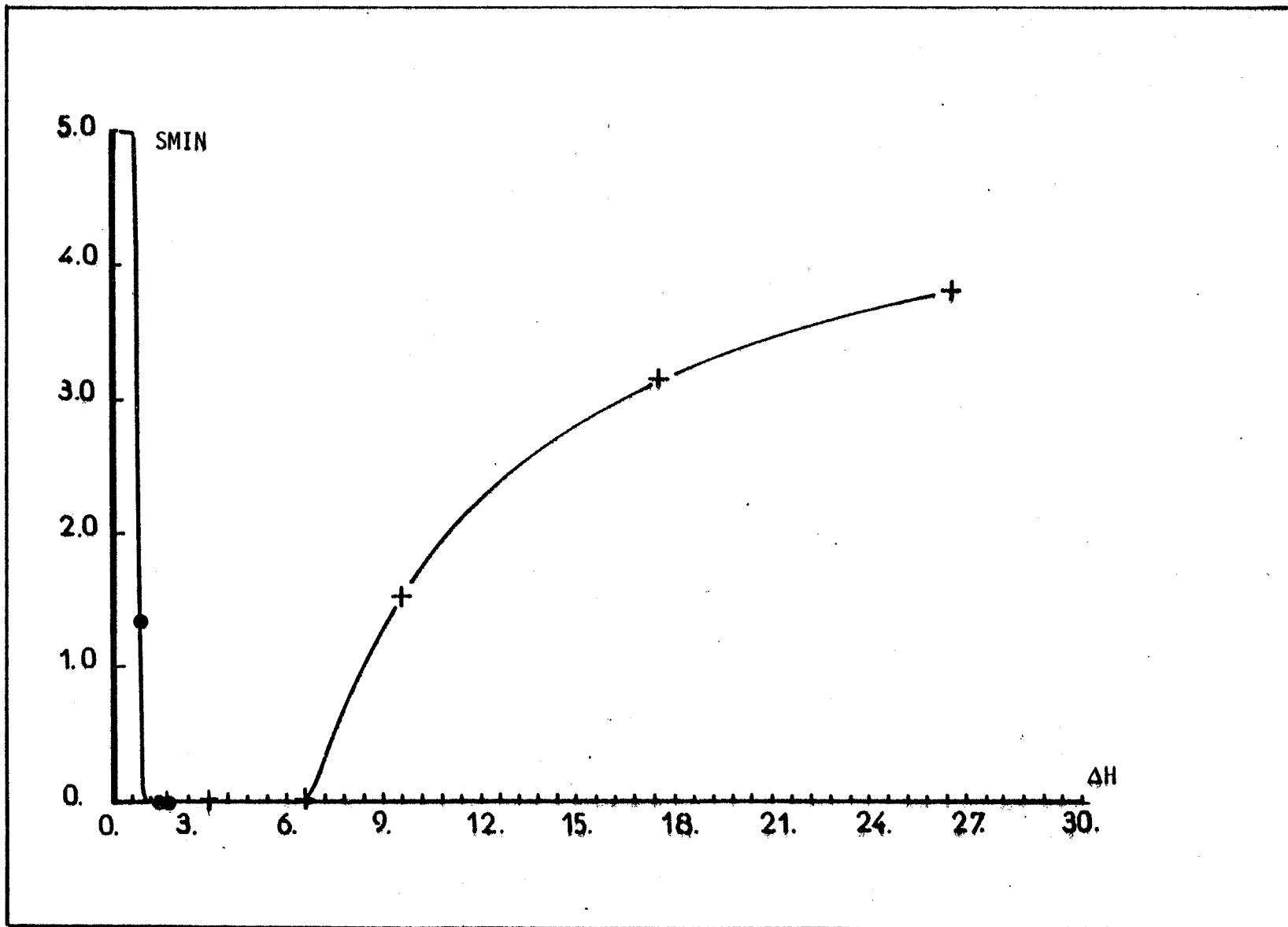


Figure 5 : Evolution de la concentration en fonction de ΔH pour ΔH grand , $S_0 = 5$,

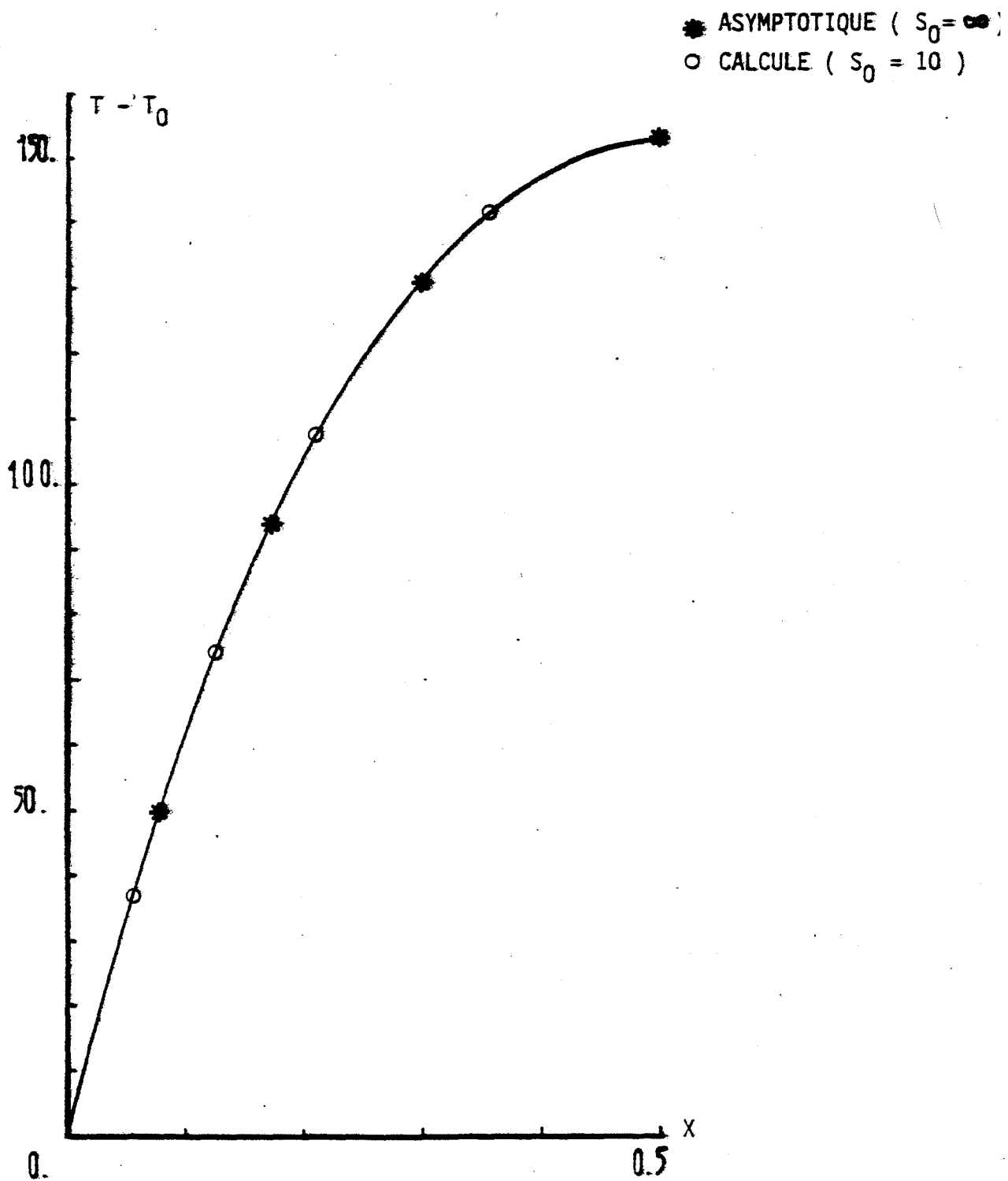


Figure 6 : Profils de température lorsque S_0 devient grand .
 (pour $S_0 = 1$ ou 5 les courbes sont les mêmes) .

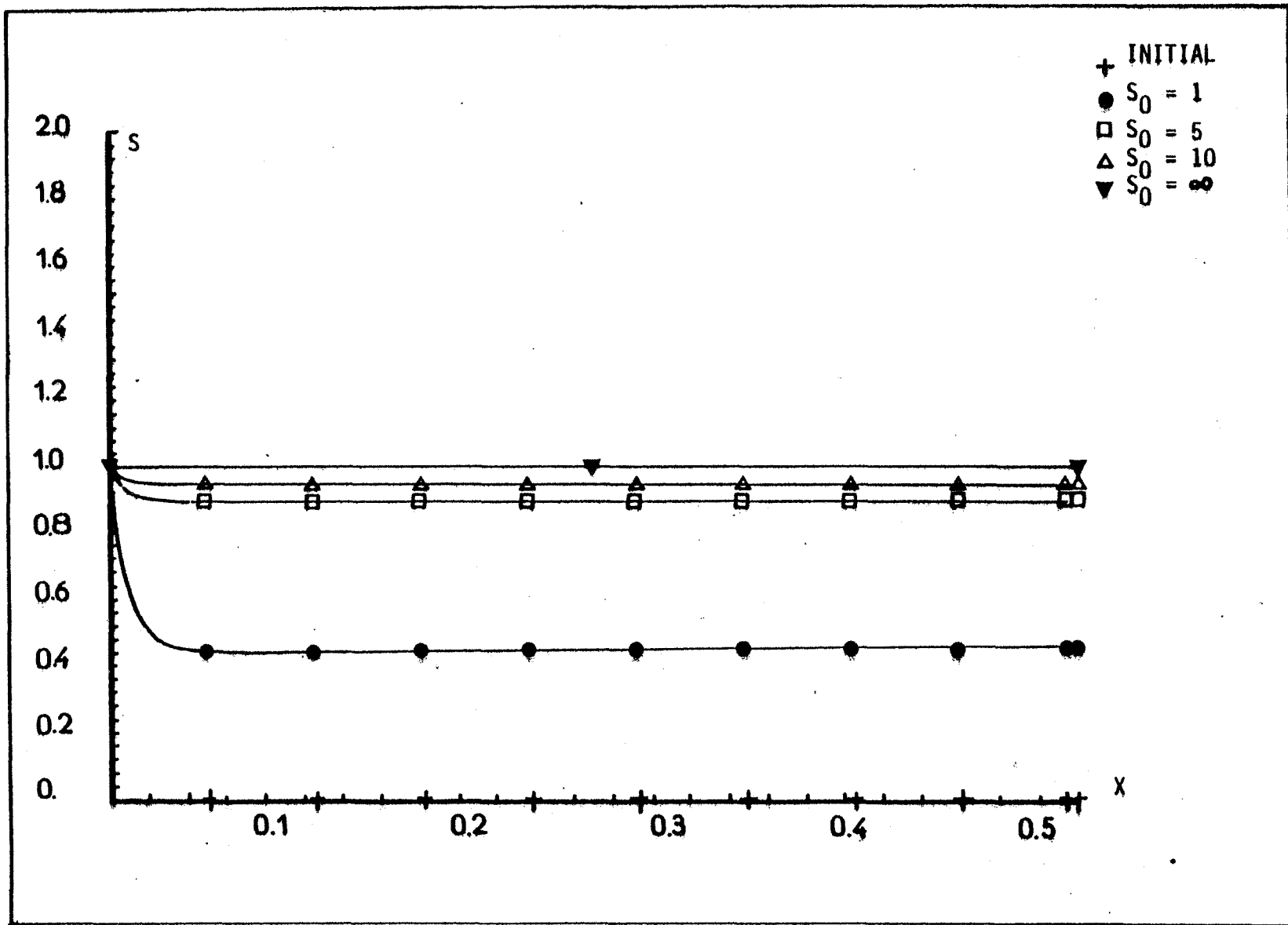


Figure 7 : Profils de concentration normalisés lorsque S_0 devient grand .

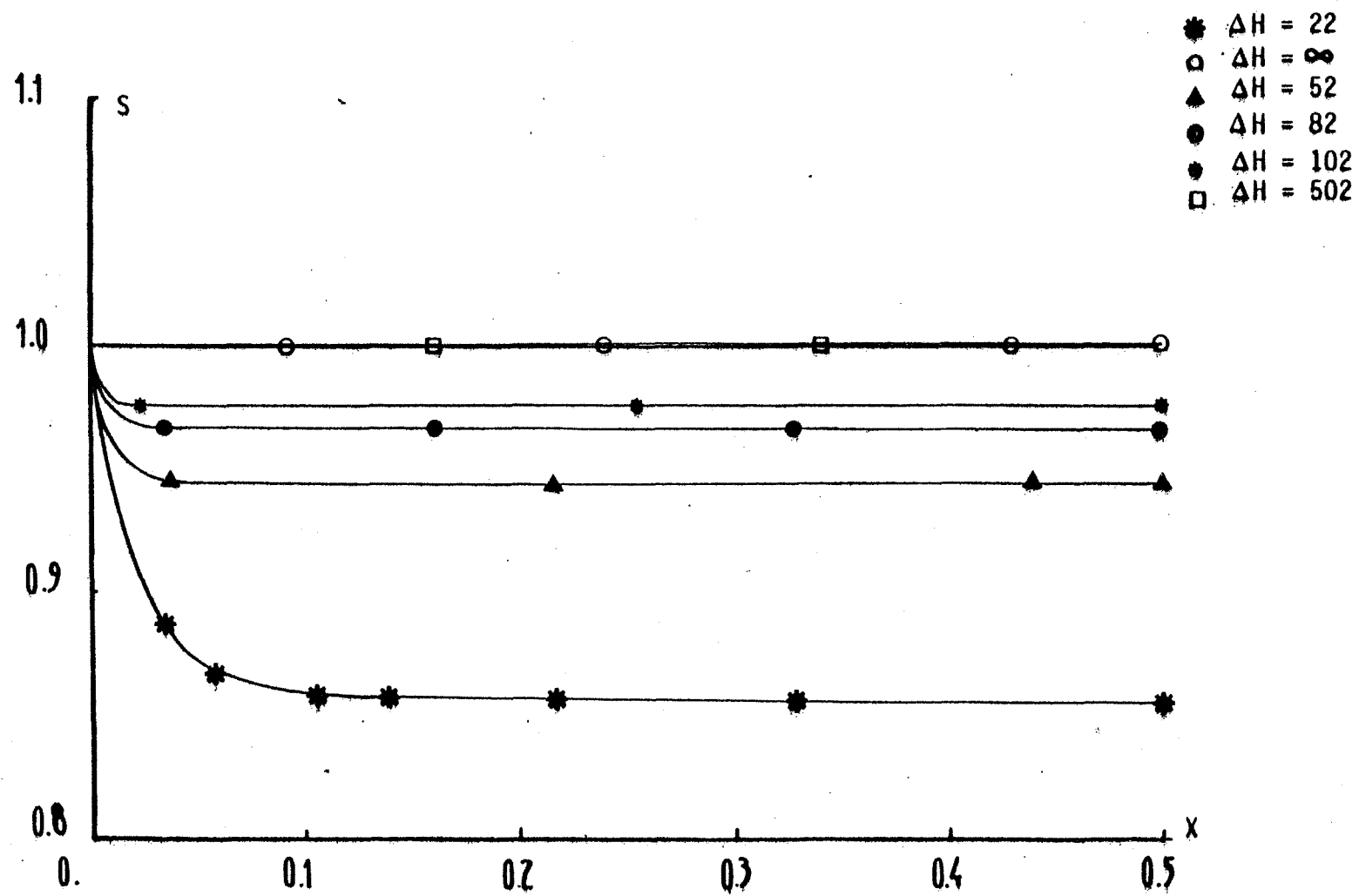


Figure 8 : Profils des concentrations normalisées lorsque ΔH tend vers $+\infty$.
 ($S_0 = 5$)

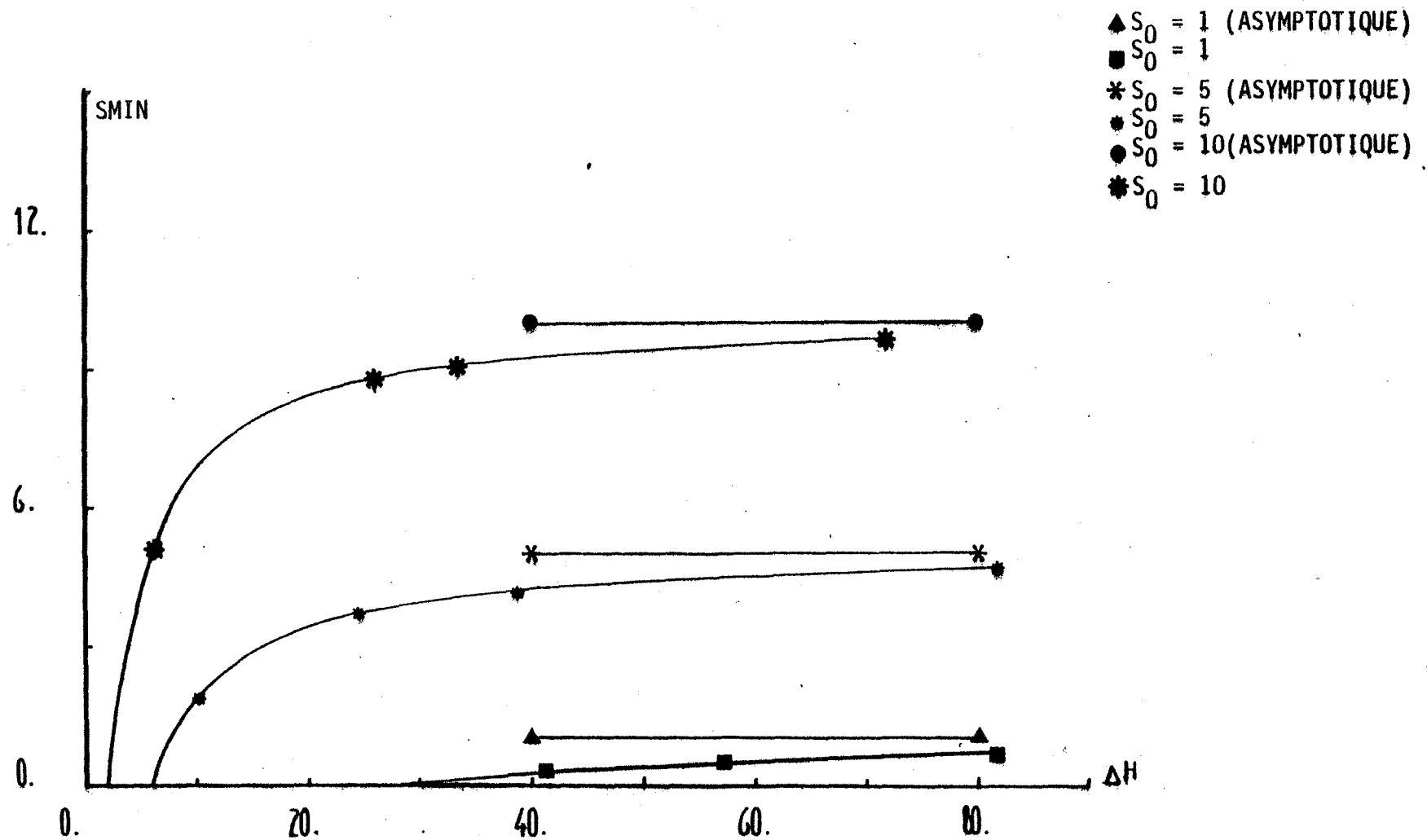


Figure 9 : Evolution de la concentration au centre de la membrane lorsque ΔH tend vers $+\infty$ pour diverses valeurs de S_0 .

CHAPITRE II

POINTS DE RETOURNEMENT DE PROBLEMES ELLIPTIQUES

DEPENDANT D'UN PARAMETRE DE PERTURBATION

APPLICATION A L'IDENTIFICATION

SOMMAIRE

I - INTRODUCTION

II - CADRE MATHEMATIQUE - RAPPELS

III - RESULTAT DE PERTURBATION PRINCIPAL

IV - CAS D'UN PROBLEME AUTO-ADJOINT

V - UNE PREMIERE APPLICATION : BORNES DE CRITICITE

VI - UNE DEUXIEME APPLICATION : IDENTIFICATION DE PARAMETRES
(En collaboration avec V. Seguda)

APPENDICE : DESCRIPTION DE L'ALGORITHME D'IDENTIFICATION

THE LOCAL BEHAVIOUR OF TURNING POINTS
IN NONLINEAR EIGENVALUE PROBLEMS . APPLICATION TO
PARAMETER IDENTIFICATION

ABSTRACT

This paper is concerned with a class of nonlinear second order elliptic equations involving two real parameters λ and ϵ , λ being considered as a bifurcation parameter. We assume existence of turning points for some fixed ϵ , set up the existence of such points when ϵ is slightly perturbed, and estimate their local dependence under the perturbation. We apply the results to the inverse problem of identifying ϵ when some turning value $\lambda^*(\epsilon)$ is known, for instance, from a practical point of view, by observing hysteresis. We give an algorithm based on our estimation technique coupled with the Newton method and test the efficiency of the procedure on some classical models in combustion and enzyme kinetics theory.

-1- INTRODUCTION

We consider the following second order nonlinear eigenvalue problem (NLEP) :

$$(1-1)_\varepsilon \quad \begin{cases} Lu = f(\lambda, x, u, \varepsilon) & \text{in } \Omega \\ Bu = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

that is, a diffusion and reaction model, where Ω is a regular bounded open domain of \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, L a second order linear operator corresponding to the diffusion phenomenon. The nonlinearity f represents the kinetics of the reaction and B is some boundary operator.

Typical situations are for instance $L = -\Delta$ and :

$$f(\lambda, x, u, \varepsilon) = \lambda e^{\frac{u}{1+\varepsilon u}}$$

in the combustion model [43] or

$$f(\lambda, x, u, \varepsilon) = \lambda (1-u)^m \left(\frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon + 1-u} \right)^{m+k}$$

in the Langmuir-Hinshelwood model [4] [16] or else :

$$f(\lambda, x, u, \varepsilon) = \frac{1-u}{\varepsilon^2 + \varepsilon\lambda(1-u) + k\lambda^2(1-u)^2}$$

in enzyme kinetics when the reaction is inhibited by excess of substrate [11] .

The real $\lambda \geq 0$ is considered in the sequel as a bifurcation parameter whereas ε plays the role of a perturbation parameter, around some reference value ε_0 .

We investigate the following type of situation : assume $\lambda^*(\varepsilon_0)$, $u^*(\varepsilon_0)$ is, say, an isolated left turning point for $(1-1)_{\varepsilon_0}$, which means that, locally, $(1-1)_{\varepsilon_0}$ has no solution for $\lambda > \lambda^*(\varepsilon_0)$, one for $\lambda = \lambda^*(\varepsilon_0)$, and two solutions for $\lambda < \lambda^*(\varepsilon_0)$.

We are interested in the perturbed problem $(1-1)_{\varepsilon}$, and more specifically look for :

1.- Local existence of a turning point $\lambda^*(\varepsilon)$, $u^*(\varepsilon)$ for $(1-1)_{\varepsilon}$.

2.- A quantitative estimation of $\lambda^*(\varepsilon) - \lambda^*(\varepsilon_0)$ and some norm of $u^*(\varepsilon) - u^*(\varepsilon_0)$ for ε near ε_0 , at least asymptotically , as $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$. The dependance of the turning points upon ε is of practical importance since these points correspond usually to the limits of extinction or ignition regimes [43][78] ; so the knowledge of the function $\lambda^*(\varepsilon)$, at least locally , may be useful to realize optimal design of a reactor for instance. This idea is mentioned in [68] where a similar study was developed for the dependance of critical points upon the domain Ω .

A typical situation is represented Fig.1 hereafter; the bifurcation diagrams correspond to the combustion model mentioned before.

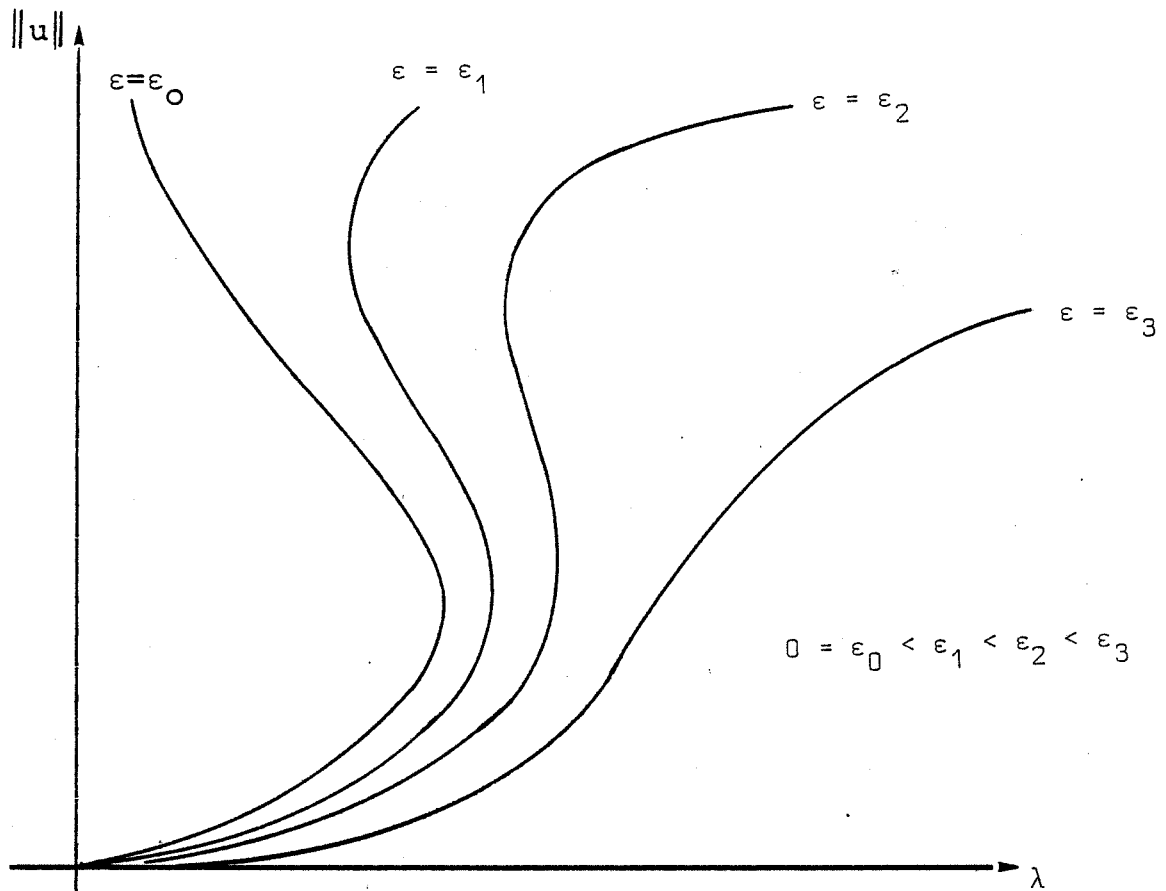


Fig 1 : bifurcation diagram for :

$$u'' + \lambda e^{\frac{u}{1+\epsilon u}} = 0; \quad u(0) = u(1) = 0$$

Generally, we have multiple solutions for λ in some interval

$(\lambda^{**}(\epsilon), \lambda^*(\epsilon))$ (see Fig.2), in the most usual case we have at least three solutions, thus giving some S-shaped curve for the bifurcation diagram (fig.3). Classical results [11][37][50] show that the maximal and minimal solutions are stable, the intermediate one(s) being unstable, therefore, increasing λ , then decreasing it, we observe a hysteresis phenomenon when the solutions are considered as stationary points of the associated evolution problem (1-2) _{ϵ} : $u_t + Lu - f(\lambda, x, u, \epsilon) = 0$ (Fig. 3) .

Thus $\lambda^*(\varepsilon)$ or $\lambda^{**}(\varepsilon)$ are physically accessible. Our idea, which is already mentioned in [50], but has not yet been much worked out, is that ε can be estimated if $\lambda^*(\varepsilon)$ for instance is known. We give an algorithm for estimating ε based on a simple Newton procedure for the equation :

$$\lambda^*(\varepsilon) = \tilde{\lambda}$$

where $\tilde{\lambda}$ is a measured value of $\lambda^*(\varepsilon)$.

This identification algorithm is available since by our general results, $\frac{d\lambda^*}{d\varepsilon}$ can be calculated. We test it on the problems mentioned before.

Qualitative results of perturbation concerning turning points are well known ([37] [38]). Our contribution consists in giving first order quantitative estimations and applying the results to an inverse problem.

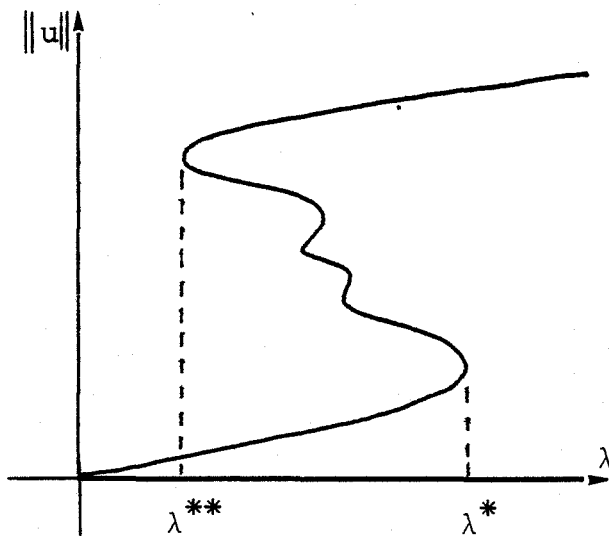


Fig. 2 : A typical bifurcation diagram for a nonlinear problem.

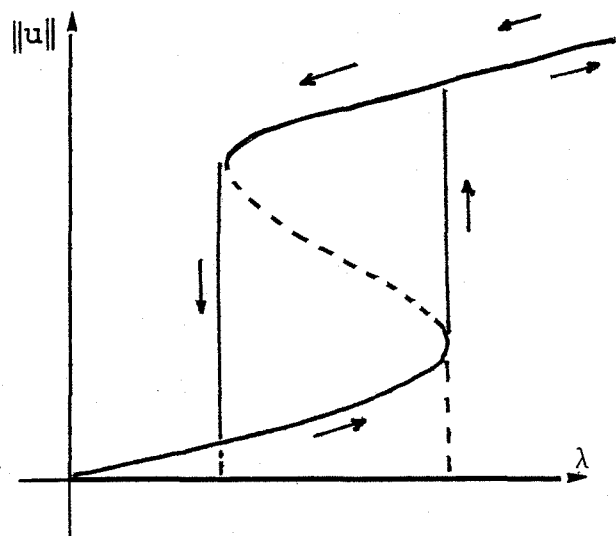


Fig. 3: Hysteresis jumps corresponding to instability of the intermediate solution in the case of an S-shaped diagram.

- 2 - MATHEMATICAL BACKGROUND

Let $\partial\Omega$ be of class $C^{2+\alpha}$ for some $\alpha \in (0,1)$.

We suppose :

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] + a(x)u$$

is uniformly elliptic, with coefficients

$$a_{ij} \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}) , \quad a \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}) \quad a(x) \geq 0 \text{ on } \Omega.$$

The boundary operator is assumed to be of the form :

$$B(u) = \beta_0(x)u + \delta \frac{\partial u}{\partial \beta} = \beta_0 u + \delta \sum_{i,j=1}^n \beta_i(x) a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} ,$$

$\beta_i , \beta_0 \in C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$ where β is an outward normal pointing vector.

The following subsidiary conditions, assumed in the sequel, guarantee a strong maximum principle for the boundary value problem (L, B) :

either $\delta(x) = 0$ and then $\beta_0(x) > 0$, or $\delta(x) = 1$ and then $\beta_0(x) \geq 0$ with $a(x) > 0$ when $\beta_0(x) = 0$.

We recall the following classical result ([75]) :

THEOREM 2-1 :

For every $v \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ the boundary value problem

(L,B) :

$Lu = v$ in Ω ; $Bu = 0$ on $\partial\Omega$ possesses a unique solution $u = Kv \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ and K is a linear continuous operator from $C^\alpha(\bar{\Omega})$ into $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$.

Considered as an operator from $C(\bar{\Omega})$ into itself, K is compact and strongly positive ([2]).

We now list the assumptions satisfied by the nonlinearity $f(\lambda, x, t, \varepsilon)$ which is defined on $\mathbb{R}_+ \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times I$, I denoting some open interval containing ε_0 .

For simplicity, we take f of class C^3 in λ, t, ε , all the derivatives being continuous on $\mathbb{R}_+ \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times I$ and Hölder continuous with exponent α in x .

We denote by $F, F_u, F_{u\varepsilon}, \dots$ the Nemytskii operators associated with f , and the partial derivatives $f_t, f_{t\varepsilon}, \dots$. Then, if $u \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $F(\lambda, u, \varepsilon), F_u(\lambda, u, \varepsilon), \dots$ are also in $C^\alpha(\bar{\Omega})$ and it is well known ([2]) that the NLEP

(1-1) $_\varepsilon$ for $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, is equivalent to the fixed point formulation

(2-1) $_\varepsilon$ $u = KF(\lambda, u, \varepsilon)$ for $u \in C(\bar{\Omega})$.

Moreover, a simple calculation shows that $KF(\lambda, u, \varepsilon)$, considered as an operator from $\mathbb{R}_+ \times C(\bar{\Omega}) \times I$ into $C(\bar{\Omega})$ admits Fréchet derivatives up to the second order and :

$$\left[KF(\lambda, u, \varepsilon) \right]_D = K \left[F_D(\lambda, u, \varepsilon) \right]$$

where D is some derivation symbol of order less than two, involving $\lambda, u, \varepsilon \dots$

REGULAR TURNING OR BENDING POINTS :

For fixed ε , let (λ^*, u^*) be a solution of (1-1) $_{\varepsilon}$ or (2-1) $_{\varepsilon}$ satisfying the two conditions (B1) et (B2) given hereafter :

(B1) the operator $I - K[F_u(\lambda^*, u^*, \varepsilon)] \in \mathcal{L}(C(\bar{\Omega}))$

has a onedimensional kernel \mathcal{N} generated, say, by $\varphi \in C(\bar{\Omega})$, a vector perfectly defined by the conditions :

$$(\varphi | \varphi) = \int_{\Omega} \varphi^2(x) dx = 1$$

and

$$\varphi(x_0) > 0 \quad \text{for some } x_0 \in \Omega \text{ such that } \varphi(x_0) \neq 0$$

Note that, by the regularity assumptions,

$$\mathcal{N} = \{w \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}); Lw = F_u(\lambda^*, u^*, \varepsilon)w; Bw = 0\}.$$

Since $w \rightarrow K[F_u(\lambda^*, u^*, \varepsilon)w]$ is a compact operator on $C(\bar{\Omega})$, an immediate consequence of the Fredholm alternative ([42]) is that the transpose of $I - K F_u(\lambda^*, u^*, \varepsilon)$ in the sense of the duality \langle, \rangle on $C(\bar{\Omega}) \times C'(\bar{\Omega})$ has a onedimensional kernel ${}^t\mathcal{N}$ generated, say, by ${}^t\varphi \in C'(\bar{\Omega})$, the dual space of $C(\bar{\Omega})$. We assume:

(B2) $\langle {}^t K {}^t \varphi, F_\lambda(\lambda^*, u^*, \varepsilon) \rangle \neq 0$, where ${}^t K \in \mathcal{L}(C'(\bar{\Omega}))$

is the transposed operator of K .

The following result, a simple adaptation of a classical one of Crandall and Rabinowitz ([37]), characterizes the special turning points we consider in the remainder of that paper, roughly speaking, the regular turning points associated with a simple eigenvalue.

THEOREM 2-2 :

Under the regularity assumptions on L, B, f and (B1), (B2), (λ^*, u^*) is a regular turning point of $(2-1)_\varepsilon$: in some neighborhood of (λ^*, u^*) , every solution (λ, u) of $(2-1)_\varepsilon$ admits the following parametric representation in $s \in \mathbb{R}$:

$$\lambda = \lambda(s) = \lambda^* + \tau(s)$$

$$u = u(s) = u^* + s\varphi + Z(s)$$

for s sufficiently small; $Z(s)$ belongs to a supplementary of the kernel \mathcal{N} in $C(\bar{\Omega})$. The functions τ and Z are differentiable at the origin and :

$$\tau(0) = 0 ; \tau'(0) = 0 ; Z(0) = 0 ; Z'(0) = 0.$$

Moreover τ admits a second derivative for $s = 0$ given by :

$$\tau''(0) = \frac{-\langle \varphi, K[F_{uu}(\lambda^*, u^*, \varepsilon)\varphi \cdot \varphi] \rangle}{\langle \varphi, K F_{\lambda}(\lambda^*, u^*, \varepsilon) \rangle}$$

A consequence of Theorem 1 is that near (λ^*, u^*) , the set of solutions of (2-1) _{ε} in $\mathbb{R}_+ \times C(\Omega)$ is a regular arc parametrized by s .

We say that (λ^*, u^*) is a non degenerate regular turning point if $\tau''(0) \neq 0$ and we consider only such points.

Therefore, we are lead to assume subsequently the following supplementary non degeneracy condition :

$$(B3) \quad \langle \varphi, K[F_{uu}(\lambda^*, u^*, \varepsilon)\varphi \cdot \varphi] \rangle \neq 0$$

The situation resulting from Theorem 2-2 is illustrated by Fig.4 :

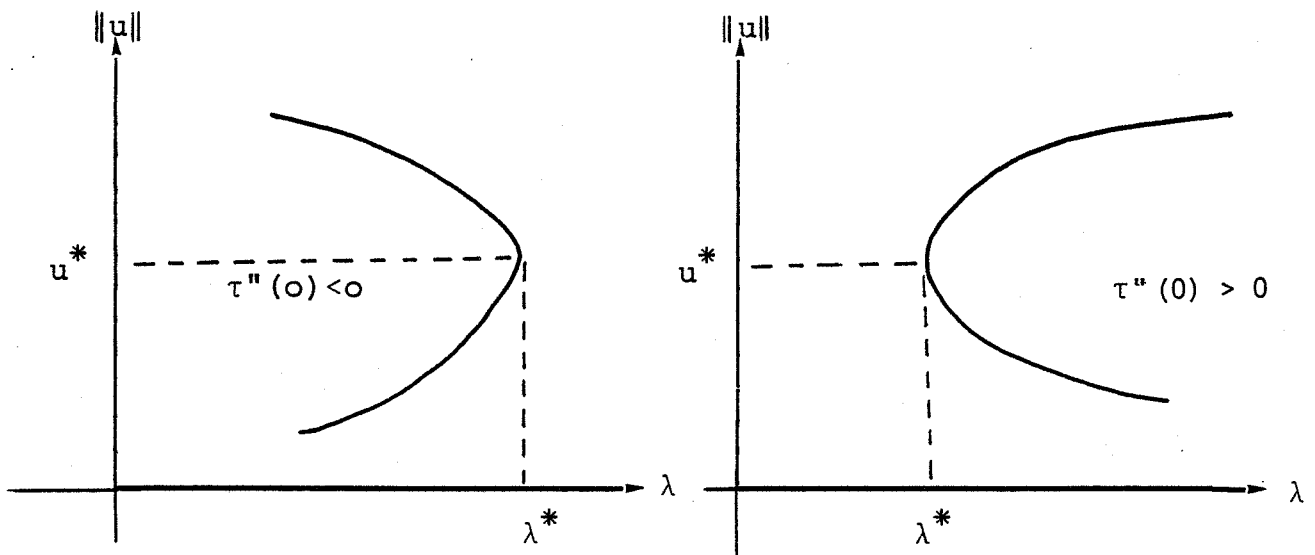


Fig.4 : bifurcation diagrams near a regular nondegenerate turning point.

Proof of Theorem 2-2 :

Define $G : \mathbb{R} \times C(\bar{\Omega}) \longrightarrow C(\bar{\Omega})$ by: $G(\lambda, u) = u - KF(\lambda, u, \varepsilon)$ (since ε is fixed here, we omit it in G). The problem is to solve $G(\lambda, u) = 0$. We have the following list of properties :

$$1^\circ / G(\lambda^*, u^*) = 0$$

2°/ By (B1) $G_u(\lambda^*, u^*)$ has a kernel \mathcal{N} of dimension one and by a compactness argument, also a closed range of codimension one ([42, Lemma 9.7.2]).

3°/ (B2) implies that $G_\lambda(\lambda^*, u^*)$ is not in the range of $G_u(\lambda^*, u^*)$: suppose the contrary, then

$$G_\lambda(\lambda^*, u^*) = G_u(\lambda^*, u^*)w \quad \text{for some } w \in C(\bar{\Omega}), \text{ that is:}$$

$$-K F_\lambda(\lambda^*, u^*, \varepsilon) = w - K[F_u(\lambda^*, u^*, \varepsilon)w]$$

and applying the form t_φ :

$$- \langle t_\varphi, K F_\lambda(\lambda^*, u^*, \varepsilon) \rangle = \langle t_\varphi, w - K[F_u(\lambda^*, u^*, \varepsilon)w] \rangle =$$

$$= \langle t_\varphi, [I - K[F_u(\lambda^*, u^*, \varepsilon)]]w \rangle = 0$$

by the definition of t_φ , and this is inconsistent with (B2).

Conditions 1°/, 2°/, 3°/ imply the first part of the result by a direct application of Theorem 3.2 of [37].

However, by the regularity assumptions, τ has the regularity of G , and $\tau''(0)$ is obtained by a formal differentiation in s up to the second order of the equation :

$$G(\lambda^* + \tau(s), u^* + s\varphi + Z(s)) = 0$$

which gives :

$$\begin{aligned} G_\lambda(\lambda^*, u^*)\tau''(0) + G_{uu}(\lambda^*, u^*)\varphi.\varphi + \\ + G_u(\lambda^*, u^*)Z''(0) = 0 \end{aligned}$$

that is :

$$\begin{aligned} \tau''(0) - K F_\lambda(\lambda^*, u^*, \varepsilon) + K[F_{uu}(\lambda^*, u^*, \varepsilon)\varphi.\varphi] = \\ = Z''(0) - K[F_u(\lambda^*, u^*, \varepsilon)Z''(0)]. \end{aligned}$$

Applying the form ${}^t\varphi$ on this equality eliminates the right hand side and achieves the proof ■

We summarize the results of this section by the following characterization of turning points.

DEFINITION 2-1 :

We say (λ^*, u^*) is a regular non degenerate turning point of (2-1)_ε if one can find $(\lambda^*, u^*, \varphi) \in \mathbb{R} \times C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega})$ satisfying the following conditions :

$$(2-1-1) \quad u^* - K F(\lambda^*, u^*, \varepsilon) = 0$$

$$(2-1-2) \quad \varphi - K[F_u(\lambda^*, u^*, \varepsilon)\varphi] = 0 \quad \varphi \neq 0$$

$$(2-1-3) \quad (\varphi|\varphi) = 1 \quad \text{and} \quad \varphi(x_0) > 0 \quad \text{for some } x_0 \text{ such that } \varphi(x_0) \neq 0$$

$$(2-1-4) \quad \langle {}^t\varphi, K F_\lambda(\lambda^*, u^*, \varepsilon) \rangle \neq 0$$

$$(2-1-5) \quad \langle t_\varphi, K[F_{uu}(\lambda^*, u^*, \varepsilon)\varphi \cdot \varphi] \rangle \neq 0$$

$$(2-1-6) \quad I - K[F_u(\lambda^*, u^*, \varepsilon)] \quad \text{has a kernel of dimension 1.}$$

In this definition t_φ is a generator of the kernel of

$$t[I - K F_u(\lambda^*, u^*, \varepsilon)].$$

- 3 - THE MAIN PERTURBATION RESULT

In this section, we assume $\lambda^*(\varepsilon_0), u^*(\varepsilon_0)$ is a regular nondegenerate turning point of $(2-1)_{\varepsilon_0}$. We show that for ε near ε_0 , $(2-1)_\varepsilon$ also admits a turning point. A similar result can be found in [37] but the proof is slightly different. However that may be, our technique allows the estimation of the derivatives of $\lambda^*(\varepsilon), u^*(\varepsilon)$ with respect to ε .

THEOREM 3-1 :

Assume $\lambda^*(\varepsilon_0), u^*(\varepsilon_0)$ is a turning point of $(2-1)_{\varepsilon_0}$ in the sense of Definition 2-1. Then for $|\varepsilon - \varepsilon_0|$ small enough, $(2-1)_\varepsilon$ admits a turning point $\lambda^*(\varepsilon), u^*(\varepsilon)$, continuous in ε and :

$$(\lambda^*(\varepsilon), u^*(\varepsilon)) \longrightarrow (\lambda^*(\varepsilon_0), u^*(\varepsilon_0)) \text{ in } \mathbb{R} \times C(\bar{\Omega})$$

as $\varepsilon \longrightarrow \varepsilon_0$. Moreover, the concavity of the arc solution (λ, u) of $(2-1)_{\varepsilon_0}$ near $\lambda^*(\varepsilon_0), u^*(\varepsilon_0)$ is preserved for $(2-1)_\varepsilon$ at $\lambda^*(\varepsilon), u^*(\varepsilon)$.

Proof of Theorem 3-1 :

We apply the implicit function theorem with parameter ε to a suitable equation characterising turning points. For simplicity the upper index o means that any expression is calculated for $\varepsilon_o, \lambda^*(\varepsilon_o), u^*(\varepsilon_o)$; φ_o denotes the generator of the kernel as fixed by Definition 3-1 for NLEP (2-1) $_{\varepsilon_o}$ and ${}^t\varphi_o$ is a generator of the adjoint problem. Let \mathcal{O} be the following open set :

$$\mathcal{O} = \{(\lambda, u, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega}) / \varphi(x_o) > 0\}.$$

We define the mapping

$$\mathcal{R} : \mathcal{O} \times I \rightarrow C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega}) \times \mathbb{R}$$

by :

$$\mathcal{R}(\lambda, u, \varphi, \varepsilon) = \begin{cases} u - K F(\lambda, u, \varepsilon) \\ \varphi - K[F_u(\lambda, u, \varepsilon)\varphi] \\ (\varphi|\varphi) - 1 \end{cases}$$

Clearly, $\mathcal{R}^o = \mathcal{R}(\lambda^*(\varepsilon_o), u^*(\varepsilon_o), \varphi_o, \varepsilon_o) = 0$ and

\mathcal{R} is continuous on $\mathcal{O} \times I$. Moreover \mathcal{R} admits a continuous partial derivative on $\mathcal{O} \times I$ with respect to (λ, u, φ) given by :

$$\mathcal{R}_{\lambda, u, \varphi}(\hat{\lambda}, \hat{u}, \hat{\varphi}) = \begin{cases} -\hat{\lambda} K F_{\lambda}(\lambda, u, \varepsilon) + \hat{u} - K[F_u(\lambda, u, \varepsilon)\hat{u}] \\ -\hat{\lambda} K[F_{u\lambda}(\lambda, u, \varepsilon)\varphi] - K[F_{uu}(\lambda, u, \varepsilon)\varphi\hat{u}] \\ \quad + \hat{\varphi} - K[F_u(\lambda, u, \varepsilon)\hat{\varphi}] \\ 2(\varphi|\hat{\varphi}) \end{cases}$$

We claim that $\mathcal{R}_{\lambda, u, \varphi}^0$ is an isomorphism from

$$\mathbb{R} \times \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \text{ onto } \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \times \mathbb{R} :$$

we prove that, given $(g_1, g_2, v) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \times \mathbb{R}$, the system: $\mathcal{R}_{\lambda, u, \varphi}^0(\hat{\lambda}, \hat{u}, \hat{\varphi}) = (g_1, g_2, v)$ has a unique solution $\hat{\lambda}, \hat{u}, \hat{\varphi}$ which depends continuously on the second member (g_1, g_2, v) ; this is a sufficient condition for isomorphism by the open mapping theorem.

Consider the first equation :

$-\hat{\lambda} K F_{\lambda}^0 + \hat{u} - K[F_u^0 \hat{u}] = g_1$; since the operator $I - K[F_u^0 \cdot]$ is completely continuous, we apply Fredholm's alternative : the equation is solvable in \hat{u} iff $\langle {}^t \varphi_0, g_1 + \hat{\lambda} K F_{\lambda}^0 \rangle = 0$
By (B_2) the unique solution is :

$$\hat{\lambda} = \frac{\langle - {}^t \varphi_0, g_1 \rangle}{\langle {}^t \varphi_0, K F_{\lambda}^0 \rangle}$$

and $\hat{\lambda}$ is continuous in g_1 .

The general solution of the first equation is then

$\hat{u} = \hat{u}_0 + t \varphi_0$, $t \in \mathbb{R}$, where \hat{u}_0 belongs to a supplementary space Z of the kernel \mathcal{N}_0 of $I - K[F_u^0 \cdot]$. It is known that the first equation restricted to Z has a unique solution for given $\hat{\lambda}$ and that the solution depends continuously on the data.

Therefore it remains only to prove that $t \in \mathbb{R}$ is unique and depends continuously on g_1, g_2 . For this purpose consider

the second equation :

$$\hat{\varphi} - K[F_u^0 \hat{\varphi}] = g_2 + \hat{\lambda} K[F_{u\lambda}^0 \varphi_0] + K[F_{uu}^0 \varphi_0 \hat{u}]$$

Again by Fredholm's alternative, we have a solution iff

$$\langle {}^t\varphi_0, g_2 + \hat{\lambda} K[F_{u\lambda}^0 \varphi_0] + K[F_{uu}^0 \varphi_0 \hat{u}] \rangle = 0$$

which gives, when \hat{u} is replaced by $\hat{u}_0 + t \varphi_0$ and thanks to the nondegeneracy condition (B3) :

$$\frac{1}{t} = \frac{-\langle {}^t\varphi_0, K[F_{uu}^0 \varphi_0 \cdot \varphi_0] \rangle}{\langle {}^t\varphi_0, g_2 + \hat{\lambda} K[F_{u\lambda}^0 \varphi_0] + K[F_{uu}^0 \varphi_0 \cdot \hat{u}_0] \rangle}$$

Hence $\hat{\lambda}$, \hat{u} are unique and depend continuously on g_1 , g_2 .

By a similar argument for $\hat{\varphi}$, we write the general solution $\hat{\varphi}$ of the second equation under the form :

$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_0 + t \varphi_0$$

where $\hat{\varphi}_0 \in \mathbb{Z}$ is unique and depends continuously upon g_1 , g_2 .

The third equation :

$$2(\varphi | \hat{\varphi}) = v$$

gives then :

$$t = \frac{v - 2(\varphi_0 | \hat{\varphi}_0)}{(\varphi_0 | \varphi_0)}$$

which is continuous in v , $\hat{\varphi}_0$, that is in v , g_1 , g_2 and

therefore $\mathcal{R}_{\lambda, u, \varphi}^0$ is an isomorphism.

By the standard implicit function theorem, we get the existence of $\lambda^*(\varepsilon), u^*(\varepsilon), \varphi_\varepsilon$ in a neighbourhood of $\lambda^*(\varepsilon_0), u^*(\varepsilon_0), \varphi_0$ such that $\mathcal{R}(\lambda^*(\varepsilon), u^*(\varepsilon), \varphi_\varepsilon, \varepsilon) = 0$ which are the turning conditions (2-1-1) (2-1-2) (2-1-3) of definition 2-1.

Note that $\varphi_\varepsilon(x_0) > 0$ is true by continuity.

The remaining conditions (2-1-4) (2-1-5) (2-1-6) are consequence of general results concerning perturbation of Fredholm operators :

Consider $T(\varepsilon) = I - K[F_u(\lambda^*(\varepsilon), u^*(\varepsilon), \varepsilon)]$, a Fredholm operator ([42, Theorem 10.1]) .

Consequently for $|\varepsilon - \varepsilon_0|$ small, $\dim \text{Ker } T(\varepsilon) \leq \dim \text{Ker } T(\varepsilon_0) = 1$ ([53, Theorems 2.14 and 5.17]). But, by the definition of φ_ε , we have also $\dim \text{Ker } T(\varepsilon) \geq 1$, and (2-1-6) is established.

The transpose of $T(\varepsilon)$ has also a onedimensional kernel generated by ${}^t\varphi_\varepsilon$ whose normalized and signed representative is unique and continuous in ε near ε_0 ([37, Lemma 1.3]) .

Therefore (2-1-5) and (2-1-6) are true by continuity for ε near ε_0 and the sign of the left hand terms are kept unchanged. By the expression of $\tau''(0)$ given in Theorem 2-2, this implies that the concavity is preserved and achieves the proof of Theorem 3-1 ■ .

We have of course more regularity for the functions $\lambda^*(\varepsilon), u^*(\varepsilon)$: by the regularity assumptions and the implicit function theorem, $\lambda^*(\varepsilon), u^*(\varepsilon), \varphi_\varepsilon$ are differentiable at ε_0 and their

derivatives

$$\Lambda = \frac{d\lambda^*}{d\varepsilon} (\varepsilon_0).$$

$$U = \frac{du^*}{d\varepsilon} (\varepsilon_0)$$

$$\psi = \frac{d\varphi_\varepsilon}{d\varepsilon} (\varepsilon_0)$$

satisfy :

$$\mathcal{R}_{\lambda,u,\varphi}^0(\Lambda, U, \psi) = -\mathcal{R}_\varepsilon^0$$

or else :

$$\begin{cases} -K F_\lambda^0 \Lambda + U - K[F_u^0 U] = K F_\varepsilon^0 \\ -K[F_{u\lambda}^0 \varphi_0] \Lambda - K[F_{uu}^0 \varphi_0 U] + \psi - K[F_u^0 \psi] = K[F_{u\varepsilon}^0 \varphi_0] \\ (\varphi_0 | \psi) = 0 \end{cases}$$

This is the system appearing in the proof of Theorem 3-1 with special g_1, g_2, v . The same technique gives the expressions of Λ, U, ψ and in particular

$$\Lambda = \frac{d\lambda^*}{d\varepsilon} (\varepsilon_0) = \frac{-\langle t_{\varphi_0}, K F_\varepsilon^0 \rangle}{\langle t_{\varphi_0}, K F_\lambda^0 \rangle}$$

We rewrite the above system as :

$$\left\{ \begin{array}{l} (3-1) \quad U - K[F_u^0 U] = K F_\lambda^0 \Lambda + K F_\varepsilon^0 \\ (3-2) \quad \psi - K[F_u^0 \psi] = K[F_{u\lambda}^0 \varphi_0] \Lambda + K[F_{uu}^0 \varphi_0 U] + K[F_{u\varepsilon}^0 \varphi_0] \\ (3-3) \quad (\varphi_0 | \psi) = 0 \end{array} \right.$$

THEOREM 3-2 :

The functions $\lambda^*(\varepsilon), u^*(\varepsilon), \varphi_\varepsilon$ defined by Theorem 3-1 are differentiable at $\varepsilon = \varepsilon_0$ and their derivatives Λ, U, ψ are the unique solution of (3-1) (3-2) (3-3). In particular :

$$\Lambda = \frac{d\lambda^*}{d\varepsilon}(\varepsilon_0) = - \frac{\langle t_{\varphi_0}, KF_\varepsilon^0 \rangle}{\langle t_{\varphi_0}, KF_\lambda^0 \rangle}$$

- 4 - THE CASE OF A SELF-ADJOINT PROBLEM

In the particular case of a formally self-adjoint problem (L, B) w.r.t. the $L^2(\Omega)$ scalar product $(|)$, the previous results can be expressed in a straightforward manner. For simplicity, we suppose the coefficients a_{ij} of the second order operator L symmetric : $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ on $\bar{\Omega}$, and take the Dirichlet boundary condition $Bu \equiv u = 0$ on $\partial\Omega$. It is possible to adapt the previous method since L is a bounded linear operator from $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ into $L^2(\Omega)$ whose inverse, again denoted by K , is compact from $L^2(\Omega)$ into itself. Therefore one can replace $C(\bar{\Omega})$ by $L^2(\Omega)$ and

return to the proofs for the fixed point form of NLEP (1-1)_ε :

$$(2-1)_{\varepsilon} \quad u = K F(\lambda, u, \varepsilon) \quad u \in L^2(\Omega)$$

and use the self-adjointness to express t_{φ} in terms of φ which

$$\begin{aligned} \text{gives, when } L^2(\Omega) \text{ is identified with its dual: } 0 &= t(I - K F_u(\lambda, u, \varepsilon)) t_{\varphi} = \\ &= t(K L - K F_u(\lambda, u, \varepsilon)) t_{\varphi} = (t_L - t_{F_u}(\lambda, u, \varepsilon)) t_K t_{\varphi} = (L - F_u(\lambda, u, \varepsilon)) t_K t_{\varphi} \\ &= 0 \quad \text{that is, we have to replace } t_K t_{\varphi} \text{ by } \varphi. \end{aligned}$$

However, it is quite as simple to take the "equation" form (1-1)_ε :

$$Lu - F(\lambda, u, \varepsilon) = G(\lambda, u, \varepsilon) = 0$$

where L is an unbounded operator from $L^2(\Omega)$ into itself with domain

$$D(L) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

and apply standard results concerning Fredholm operators .

We note that

$$G_u(\lambda, u, \varepsilon)w = Lw - F_u(\lambda, u, \varepsilon)w$$

is Fredholm with domain $D(L)$, and self-adjoint, provided G is differentiable from $D(L)$ into $L^2(\Omega)$

with respect to λ, u, ε , up to the second order. A simple calculation shows that we only need the fact that applications like $h \rightarrow F_D(\lambda, u, \varepsilon)h^3$ are continuous from $D(L)$ into $L^2(\Omega)$, where D is some at most second order differential expression in λ, u, ε .

Such a condition is certainly true for $n = 1, 2, 3$ since in that case $H^2(\Omega) \subset L^{\infty}(\Omega)$. Assuming $n \leq 3$, it is easy to develop the L^2 theory as we did previously for $C(\bar{\Omega})$. We do not detail the method since this was done for a similar problem in [68] , but give the main result.

DEFINITION 4-1 :

We say (λ^*, u^*) is a regular nondegenerate turning point of $(1-1)_\epsilon$ if there exists a triplet $(\lambda^*, u^*, \varphi) \in \mathbb{R} \times D(L) \times D(L)$ satisfying the following conditions :

$$(4-1-1) \quad Lu^* = F(\lambda^*, u^*, \epsilon)$$

$$(4-1-2) \quad L\varphi = F_u(\lambda^*, u^*, \epsilon)\varphi, \text{ the kernel of } L - F_u \text{ in } L^2(\Omega) \text{ being onedimensional.}$$

$$(4-1-3) \quad (F_\lambda(\lambda^*, u^*, \epsilon) | \varphi) = 1$$

$$(4-1-4) \quad (F_{uu}(\lambda^*, u^*, \epsilon)\varphi^2 | \varphi) \neq 0$$

This is consistent with Definition 2-1 if we replace $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ by $L^2(\Omega)$ and identify the duality with the L^2 scalar product, provided $t_K t_\varphi$ can be replaced by φ , since (4-1-3) is an equivalent normalization to (2-1-3) and (2-1-4) .

By application of the implicit function theorem to the mapping defined by Equations (4-1-1) (4-1-2) (4-1-3) , one obtains :

THEOREM 4-1 :

Assume $\lambda^*(\epsilon_0), u^*(\epsilon_0)$ is a regular nondegenerate turning point of $(1-1)_{\epsilon_0}$ in the sense of Definition 4-1.

Then for $|\epsilon - \epsilon_0|$ small enough $(1-1)_\epsilon$ admits also a nondegenerate turning point $\lambda^*(\epsilon), u^*(\epsilon)$ which is differentiable at ϵ_0 .

The derivatives $\Lambda, U \in \mathbb{R} \times D(L)$ of $\lambda^*(\epsilon), u^*(\epsilon)$ are the unique solution of the following system :

$$(4-1-5) \quad \Lambda = \frac{-(F_{\varepsilon}^0 | \varphi)}{(F_{\lambda} | \varphi)}$$

$$(4-1-6) \quad LU - F_u^0 U = F_{\varepsilon}^0 + \Lambda F_{\lambda}^0$$

$$(4-1-7) \quad (F_{uu}^0 \varphi_0^2 | U) + (F_{u\varepsilon}^0 \varphi_0 | \varphi_0) + \Lambda (F_{u\lambda}^0 | \varphi_0) = 0$$

- 5 - A FIRST APPLICATION : CRITICITY BOUNDS

Formula (4-1-5) gives information on the evolution of a critical point when some physical parameter is changed, without calculation of the whole bifurcation diagrams.

Consider the special case of NLEP

$$(5-1) \quad \begin{cases} Lu = \lambda f(x, u, \varepsilon) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

where, besides the regularity assumed before f is positive and increasing in u . Generally, we have a minimal branch of solutions starting from $(0,0)$, $\lambda \rightarrow \underline{u}(\lambda, \varepsilon)$. We consider the extension in λ as far as $w \rightarrow Lw - \lambda F_u(\underline{u}, \varepsilon)w$ is invertible, which defines a maximal value $\bar{\lambda} \leq +\infty$. When $\bar{\lambda}$ is finite, it is often possible to prove that $\bar{u} = \lim_{\lambda \rightarrow \bar{\lambda}-0} \underline{u}(\lambda)$ exists

in $C(\bar{\Omega})$ (see [38]), that $(\bar{\lambda}, \bar{u})$ is a solution of (5-1) and in fact a turning point associated with a simple eigenvalue. Moreover, if for some ε_0 f is convex with respect to u , all

the conditions of Definition 4-1 are satisfied and it is possible to apply the perturbation result of Theorem 4-1 which may give an estimation of :

$$\frac{d\bar{\lambda}}{d\varepsilon}(\varepsilon) \quad \text{at} \quad \varepsilon = \varepsilon_0$$

$\bar{\lambda}(\varepsilon)$ being the first bending point of the minimal branch of (5-1) (Theorem 4-1 only gives the existence of a turning point $\lambda^*(\varepsilon)$ but, for a small perturbation, this point is the first one provided turning points are isolated). Therefore we deduce a bound for $\bar{\lambda}(\varepsilon)$ without having to compute anything concerning the perturbed problem. Let us take the example of the classical combustion problem in a slab :

$$(5-2) \quad \begin{cases} u'' + \lambda e^{\frac{u}{1+\varepsilon u}} = 0 & \text{in } (-1,1) \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$

For $\varepsilon = 0$ we have the so-called Guelfand problem with a positive convex nonlinearity. The bifurcation diagrams are represented Fig. 5 for $\varepsilon = 0$ and $\varepsilon > 0$:

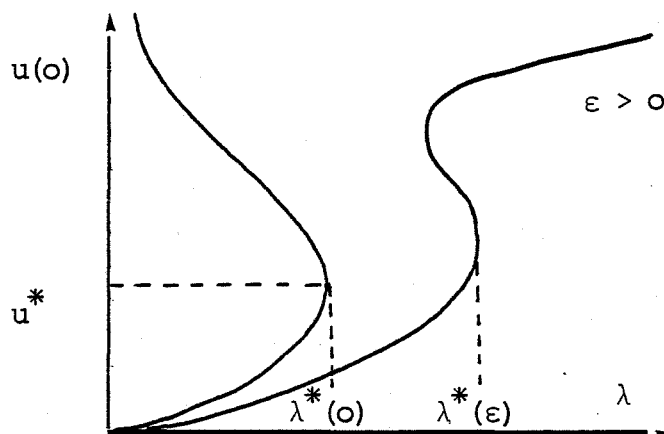


Fig. 5 : bifurcation diagrams for problem (5-2)

(λ^*, u^*) is a regular nondegenerate bending point and Theorem 4-1 applies :

$$\text{We have } \frac{d\lambda^*}{d\varepsilon}(\varepsilon) = \lambda^*(\varepsilon) \frac{\int_{-1}^1 \frac{u}{e^{1+\varepsilon u}} u^2 \varphi dx}{\int_{-1}^1 \frac{u}{e^{1+\varepsilon u}} \varphi dx} \quad (5-3)$$

Therefore $\lambda^*(\varepsilon) \geq \lambda^*(0) = \lambda^*$, $\lambda^*(\varepsilon)$ is increasing in ε

$$\text{and } \frac{d\lambda^*}{d\varepsilon}(0) \leq \lambda^* \max_{[-1,1]} (u^{*2}(x)) = \lambda^* u^{*2}(0) \quad (5-4)$$

We have computed the exact value of $\lambda^*(\varepsilon)$ for small ε by a shooting method which furnishes the whole bifurcation diagram, and compared it with the asymptotic bound given by (5-4). The results appear on Fig.6.

Since $\lambda^*(\varepsilon)$ is the extinction limit of the combustion phenomenon, estimations like (5-3) give information about the working conditions of a reactor for instance, and are therefore quite interesting.

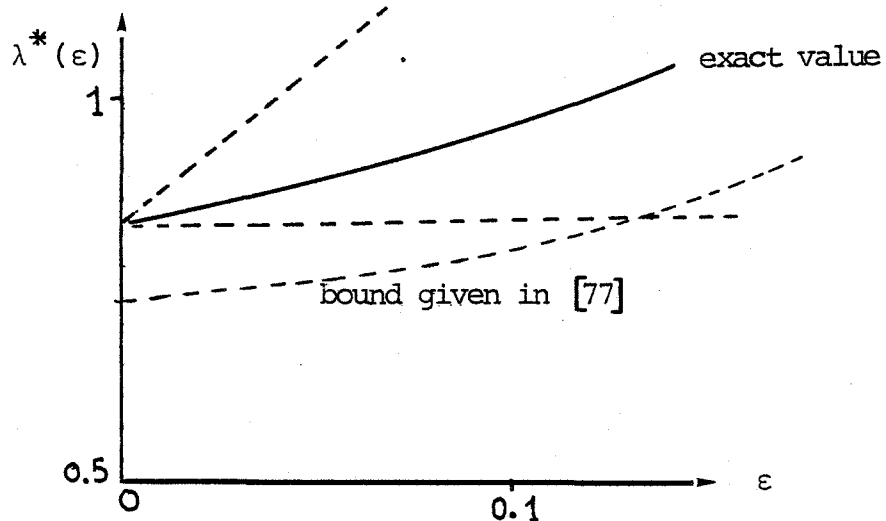


Fig.6 : comparison of the exact $\lambda^*(\varepsilon)$ and asymptotic bounds given by (5-4).

- 6 - A SECOND APPLICATION : PARAMETER ESTIMATION

PRINCIPLE OF AN IDENTIFICATION TECHNIQUE.

As mentioned in the introduction of the paper, a critical value, for instance the first turning point, may correspond to a hysteresis value $\tilde{\lambda}$, which is experimentally accessible. Thus if $\lambda^*(\varepsilon)$ denotes the turning point of a nonlinear self-adjoint problem of the form (1-1) _{ε} where ε is an unknown parameter, an identification method consists in solving the single equation $\lambda^*(\varepsilon) = \tilde{\lambda}$.

Since $\frac{d\lambda^*}{d\varepsilon}(\varepsilon)$ is known, we can apply Newton's procedure to that equation.

THE DERIVED ALGORITHM.

- 1.- Set $k = 0$ and start with some estimation ε_0 of ε .
- 2.- Compute the (first) turning point $\lambda^*(\varepsilon_k)$, $u^*(\varepsilon_k)$, φ_{ε_k}
- 3.- If $|\tilde{\lambda} - \lambda^*(\varepsilon_k)|$ is negligible, set $\varepsilon = \varepsilon_k$. Otherwise :
- 4.- Compute $\frac{d\lambda^*}{d\varepsilon}(\varepsilon_k)$ by formula (4-1-5) .
- 5.- Set $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + [\tilde{\lambda} - \lambda^*(\varepsilon_k)] \left[\frac{d\lambda^*}{d\varepsilon}(\varepsilon_k) \right]^{-1}$

Set $k = k+1$ and return to step 2.

Let us give some necessary explanation concerning the algorithm, mainly for step 2. To determine $\lambda^*(\varepsilon)$, $u^*(\varepsilon)$, φ_{ε}

we work out a standard continuation procedure, starting from (λ_0, u_0) as described in [56], which gives the bifurcation diagram $(\lambda, u(\lambda))$ for $\lambda < \lambda^*(\varepsilon)$ (in fact also for $\lambda > \lambda^*(\varepsilon)$). In the neighborhood of $\lambda^*(\varepsilon), u^*(\varepsilon)$ we apply an efficient and convergent Newton technique described in [69] which gives $\lambda^*(\varepsilon), u^*(\varepsilon), \varphi_\varepsilon$. The integrals in (4-1-5) are calculated by the trapezoidal formula.

The whole procedure is described in [32]. Let us now give a few numerical examples showing that the method is efficient, since, as we are going to see, the number of iterative loops is small.

NUMERICAL RESULTS.

We have tested among others the following typical cases, for which we have first computed the whole bifurcation diagrams for given ε ; this step gave us a $\tilde{\lambda}$ used for the inverse problem of estimating ε .

1.- THERMAL COMBUSTION.

We recall the model equation :

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda e^{\frac{u}{1+\varepsilon u}} = 0 & \text{in } \Omega \text{ (unit ball of } \mathbb{R}^n, \quad n = 1 \text{ or } 2) \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

(here ε is connected with an activation energy, a parameter hardly accessible by direct measurement).

The values of ε for which we have turning points are known at least numerically for $n = 1$ or 2 .

k	ε_k	$\lambda^*(\varepsilon_k)$
0	0	$8.7844625 \cdot 10^{-1}$
1	$3.494016 \cdot 10^{-1}$	no bending
2	$1.7470080 \cdot 10^{-1}$	1.1075095
3	$2.2185610 \cdot 10^{-1}$	1.2196885
4	$2.1521777 \cdot 10^{-1}$	1.2007514
5	$2.1494427 \cdot 10^{-1}$	1.2000012
6	$2.1494386 \cdot 10^{-1}$	1.2000000

$n = 1$
 $\lambda = 1.20$

k	ε_k	$\lambda^*(\varepsilon_k)$
0	0	1.99992223
1	$1.0388076 \cdot 10^{-1}$	2.2735560
2	$1.1027051 \cdot 10^{-1}$	2.2944099
3	$1.1158505 \cdot 10^{-1}$	2.2987770
4	$1.1193392 \cdot 10^{-1}$	2.2999406
5	$1.1194780 \cdot 10^{-1}$	2.2999868
6	$1.1195086 \cdot 10^{-1}$	2.2999971
7	$1.1195154 \cdot 10^{-1}$	2.2999994

$\tilde{n} = 2$
 $\lambda = 2.30$

2.- ENZYME KINETICS.

Under weak assumptions the coupling between diffusion and reaction in an enzyme membrane leads to the following model :

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda \frac{a - u}{\varepsilon + a - u} e^u = 0 & \text{in } \Omega (\text{unit ball of } \mathbb{R}^n) \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

The limit problem as $\varepsilon \rightarrow 0$ is in fact an obstacle problem, but, as we consider only the minimal branch, we have no

singularity even for $\varepsilon = 0$ provided a is not too small and our theory applies. The bifurcation diagrams again look like S-shaped curves for $\varepsilon > 0$ (ε is related to some kinetic parameter K_m)

k	ε_k	$\lambda^*(\varepsilon_k)$
0	0	1.9999222
1	$5.7158949 \cdot 10^{-1}$	2.2884432
2	$5.9351197 \cdot 10^{-1}$	2.2995524
3	$5.9436103 \cdot 10^{-1}$	2.2999827
4	$5.9439391 \cdot 10^{-1}$	2.2999993

$n = 2$
 $\tilde{\lambda} = 2.3$

k	ε_k	$\lambda^*(\varepsilon_k)$
0	0	3.3218182
1	1.2787327	4.4014007
2	1.3859594	4.4925913
3	1.3940184	4.4994485
4	1.3946183	4.4999589
5	1.3946629	4.4999969
6	1.3946662	4.4999998

$n = 3$
 $\tilde{\lambda} = 4.5$

3.- ENZYME KINETICS.

When inhibition by excess of substrate occurs, the concentration of substrate in an enzyme membrane is, under some hypotheses, given by the following model, which has been studied in [11] :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta s + \sigma \frac{s}{1+s+ks^2} = 0 \quad \text{in } (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ s(-\frac{1}{2}) = s(\frac{1}{2}) = \alpha \end{array} \right. \quad k=0.1$$

Under the transformations $s(x) = \alpha u(x)$, $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$, $\lambda = \frac{\alpha}{\sqrt{\sigma}}$, used in [11] by the authors, we get the equivalent form :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + \frac{u}{\varepsilon^2 + \varepsilon \lambda u + k \lambda^2 u^2} = 0 \quad \text{in } (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ u(-\frac{1}{2}) = u(\frac{1}{2}) = 1 \end{array} \right.$$

Again we have a singular behaviour when $\varepsilon \rightarrow 0$, this time only for the minimal branch (see Fig.7) :

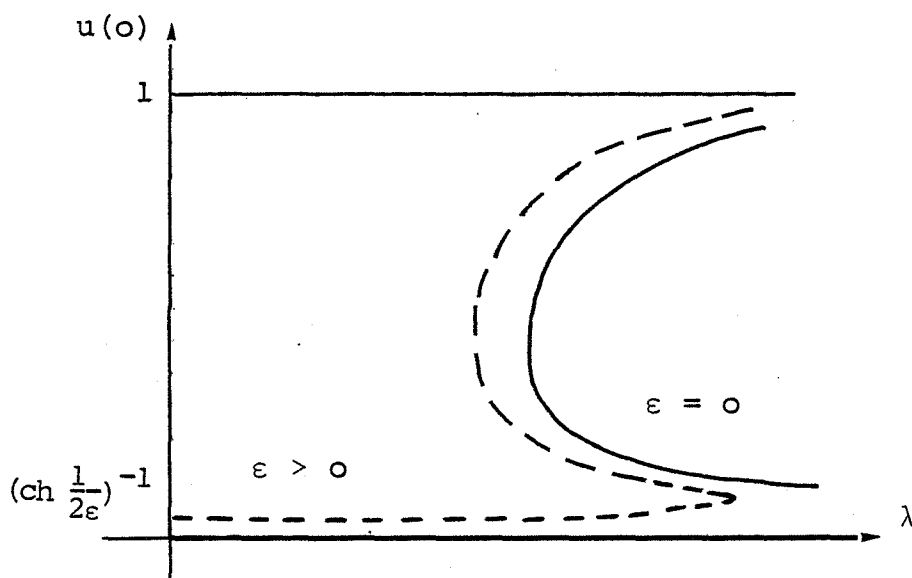


Fig.7 : Diagram for the case of inhibition by the substrate.

We have therefore adapted the method to work with the information given by the last turning point (that is, with the branch starting from $\lambda = +\infty$, $u = 1$) and of course chan-

ged the function to have homogenous boundary conditions.
The interesting feature here is that the dependency in λ is nonlinear.

k	ϵ_k	$\lambda^*(\epsilon_k)$
1	10^{-4}	2.0787876
2	$4.0958506 \cdot 10^{-2}$	1.5848741
3	$2.2019230 \cdot 10^{-2}$	1.8268412
4	$2.6344860 \cdot 10^{-2}$	1.7786390
5	$2.6235503 \cdot 10^{-2}$	1.7805270
6	$2.6277739 \cdot 10^{-2}$	1.7797965
7	$2.6261413 \cdot 10^{-2}$	1.7800787
8	$2.6267721 \cdot 10^{-2}$	1.7799696
9	$2.6265283 \cdot 10^{-2}$	1.7800118
10	$2.6266226 \cdot 10^{-2}$	1.7799955
11	$2.6265861 \cdot 10^{-2}$	1.7800018
12	$2.6266002 \cdot 10^{-2}$	1.7799993

$n = 1$
 \sim
 $\lambda = 1.78$

Other models, especially Langmuir-Hinshelwood models have been tested. All the results show that in a few Newton steps, a correct estimation of $\lambda^*(\epsilon)$ or ϵ is obtained ([32]).

APPENDIX : DESCRIPTION OF THE IDENTIFICATION ALGORITHM

We recall the procedure used in section 6 to solve the equation $\lambda^*(\varepsilon) = \tilde{\lambda}$:

Step 1 : start with an estimation ε_0 of ε .

Step 2 : find $\lambda^*(\varepsilon_0)$, $u^*(\varepsilon_0)$, $\phi(\varepsilon_0)$

Step 3 : calculate $\frac{d\lambda^*}{d\varepsilon}(\varepsilon_0)$ by formula (4-1-5)

Step 4 : replace ε_0 by $\varepsilon_0 + [\frac{d\lambda^*}{d\varepsilon}(\varepsilon_0)]^{-1}(\tilde{\lambda} - \lambda^*(\varepsilon_0))$ and return to step 2 until an output condition is fulfilled.

The algorithm seems quite elementary. However in order to obtain an efficient method, we must be able to execute step 2 economically. For this purpose, we give some complementary explanation concerning the numerical procedure.

We consider here the finite dimensional case. We shall keep the notation $u \in \mathbb{R}^n$ for the discretized solution and give the same names to the operators and their discretized analogues.

The dependency on ε_0 will not be mentionned.

Explanations concerning step 2.

For simplicity of notation we shall rewrite the boundary value problem :

$$\begin{cases} Lu + f(\lambda, x, u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

or rather its discretized analogue, under the more general form

$$(1) \quad G(\lambda, u) = 0 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad , \quad u \in \mathbb{R}^n$$

We use a continuation method [56] to get a first estimation of the turning point. Then we obtain the turning point (λ^*, u^*) and the eigenvector ϕ of the operator $G_u(\lambda^*, u^*)$ by implementation of a special iterative method [69].

Continuation method.

We follow a solution branch $\lambda(s), u(s)$ of (1) from a known point $\lambda(s_0), u(s_0)$ until it passes through the turning point. In practice, we follow, when they exist, either the highest or the lowest solution branches.

Since the methods used to estimate the turning point on the highest or on the lowest solution branch are quite similar (the only differences are the choice of the initial step s_0 , the sign of the current step Δs and the stopping test), we exhibit the one that concerns the lowest branch.

Let us start from $s_0 = 0, \lambda_0 = 0$ and $u_0 = u(0)$. We calculate each new point by solving

$$(2) \quad \begin{cases} G(\lambda, u) = 0 \\ N(\lambda, u, s) = \frac{1}{2} \dot{u}_K^* (u - u_K) + \frac{1}{2} \dot{\lambda}_K (\lambda - \lambda_K) - (s - s_K) = 0 \end{cases}$$

near s_K . The second equation defines s as some arc-length parameter approximation; \dot{u}_K^* is the transposed vector of $\dot{u}_K; \dot{\lambda}_K$ and \dot{u}_K are obtained by an approximation from the left.

We iterate this until $\lambda_{K+1} < \lambda_K$ (stopping test) which means that the turning point has been crossed.

We set $x = (\lambda, u)$ and rewrite (2) as

$$(3) \quad P(x, s) = 0$$

Since P_x is nonsingular at the turning point [56] we can use any standard method to solve (3).

Our choice is the following predictor-corrector method : prediction by the midpoint rule (Nyström's method for $q = 0$), correction by the Newton's method.

We now explicit Newton's iteration to show how we take advantage of the special structure of G_u ; this technique concerns the predictor too :

$$\text{Set } x_{K+1}^{m+1} = x_{K+1}^m + \Delta x^m$$

where Δx^m is solution of

$$(4) \quad P_x(x_{K+1}^m, s_{K+1}) \Delta x^m = -P(x_{K+1}^m, s_{K+1})$$

(4) will be solved by :

$$\text{I. } G_u(x_{K+1}^m)Z = -G_\lambda(x_{K+1}^m)$$

$$\text{II. } G_u(x_{K+1}^m)T = -G(x_{K+1}^m)$$

$$\text{III. } \Delta \lambda^m = -\frac{N - N_u T}{N_u Z + N_\lambda} \quad (N, N_u, N_\lambda \text{ are calculated at the point } (\lambda_{K+1}^m, u_{K+1}^m, s_{K+1})).$$

$$\text{IV. } \Delta u^m = \Delta \lambda^m Z + T$$

We do invert the matrix $G_u(x_{K+1}^m)$; there is no difficulty since we are never too close from the turning point.

Calculation of the turning point and eigenvector : λ^*, u^*, ϕ .

We want to solve the system of three equations (4-1-1) (4-1-2) (4-1-3) reformulated as :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} G(u^*, \lambda^*) = 0 \\ G_u(u^*, \lambda^*)\phi = 0 \\ \int G_\lambda(u^*, \lambda^*) = 1 \end{array} \right.$$

We recall that $\int G_\lambda(u^*, \lambda^*)\phi$ is the result of a numerical integration.

We take as first estimation of λ^* , u^* , ϕ the last λ_K , u_K , Δu^m which have been calculated above.

If we know that a component of ϕ is non zero, say the first ϕ_1 , we replace (5) by

$$(6) \quad \begin{cases} \bar{\phi} = \frac{\phi}{\phi_1} \\ G(u^*, \lambda^*) = 0 \\ G_u(u^*, \lambda^*)\bar{\phi} = 0 \\ \bar{\phi}_1 = 1 \end{cases}$$

$$\text{and we have } \phi = \frac{\bar{\phi}}{\int G_\lambda(u^*, \lambda^*)\bar{\phi}}$$

As (6) is nonsingular at the turning point [69], we use classical Newton's method :

$$\begin{aligned} u^{m+1} &= u^m + \Delta u^m \\ \lambda^{m+1} &= \lambda^m + \Delta \lambda^m \\ \bar{\phi}^{m+1} &= \bar{\phi}^m + \Delta \bar{\phi}^m \end{aligned}$$

where $(\Delta u^m, \Delta \lambda^m, \Delta \bar{\phi}^m)$ is solution of

$$(7) \quad \begin{cases} G_u^m \Delta u^m + G_\lambda^m \Delta \lambda^m = -G^m \\ G_u^m \Delta \bar{\phi}^m + G_{\lambda u}^m \bar{\phi}^m \Delta \lambda^m + G_{uu}^m \bar{\phi}^m \Delta u^m = -G_{u\bar{\phi}}^m \\ (\Delta \bar{\phi}^m)_1 = 0 \end{cases}$$

the upper index m for operators means that they are calculated at the point (λ^m, u^m) .

In contrast with what we did in the continuation procedure, we do not invert the operator G_u^m , but we shall keep advantage of its special structure :

we use the matrix A^m obtained by replacing the first column in G_u^m by G_λ^m .

$$A^m = (G_\lambda^m \mid \text{remaining columns of } G_u^m)$$

Then we solve a system equivalent to (7) :

$$(8) \quad \begin{cases} \Delta t = (\Delta \lambda^m, \Delta \bar{\phi}_2^m, \dots, \Delta \bar{\phi}_n^m) \\ \Delta s = (\Delta \lambda^m, \Delta u_2^m - \Delta u_1^m \bar{\phi}_1^m, \dots, \Delta u_n^m - \Delta u_1^m \bar{\phi}_n^m) \\ A^m \Delta s = -G^m - \Delta u_1^m G_u^m \bar{\phi}^m \\ A^m \Delta t = -G_u^m \bar{\phi}^m - G_{uu}^m \bar{\phi}^m \Delta u^m + \Delta \lambda^m (G_\lambda^m - G_{\lambda u}^m \bar{\phi}^m) \end{cases}$$

as follows :

$$I. \quad A^m \alpha = -G^m$$

$$A^m \beta = -G_u^m \bar{\phi}^m$$

$$II. \quad A^m \gamma = -G_u^m \bar{\phi}^m + \alpha_1 (G_\lambda^m - G_{\lambda u}^m \bar{\phi}^m) - G_{uu}^m \bar{\phi}^m \cdot (0, \alpha_2 \dots \alpha_n)$$

$$A^m \eta = \beta_1 (G_\lambda^m - G_{\lambda u}^m \bar{\phi}^m) - G_{uu}^m \bar{\phi}^m \cdot (1, \beta_1 + \bar{\phi}_1^m, \dots, \beta_n + \bar{\phi}_n^m)$$

III. get $\Delta \lambda^m$ and Δu_1^m from the system :

$$\begin{cases} \Delta \lambda^m = \alpha_1 + \Delta u_1^m \beta_1 \\ \Delta \lambda^m = \gamma_1 + \Delta u_1^m \eta_1 \end{cases}$$

IV. for $i = 2, \dots, n$

$$\begin{cases} \Delta \bar{\phi}_i^m = \gamma_i + \Delta u_1^m \eta_i \\ \Delta u_i^m = \alpha_i + \Delta u_1^m (\beta_i + \bar{\phi}_i^m) \end{cases}$$

At least, $G_\lambda(u^*, \lambda^*) \bar{\phi}$ will be integrated by trapezoidal rule, a method also used to calculate $\frac{d\lambda^*}{d\varepsilon}$ in step 3.

A remark concerning step 4.

It may happen, after step 4, that for the new value of ε_0 , no turning point occurs. This fact may be controlled by adding in the continuation method a test which fails when λ steps out of a certain domain where the turning points are localized. In this case, we change ε_0 by successive bisections of the ε -increment until a turning point occurs.

CHAPITRE III

SUR UNE CLASSE DE PROBLEMES ELLIPTIQUES

A NON-LINEARITE CONVEXE ET SINGULIERE

SOMMAIRE

I. INTRODUCTION ET MOTIVATION

II. RAPPELS - QUELQUES RESULTATS NOUVEAUX

II.1 Hypothèses et notations

II.2 Le problème (II.1)

II.3 Rappels et compléments concernant le problème (II.2)

III. ETUDE QUALITATIVE DU PROBLEME (II.3)

III.1 Etude de la branche de solutions minimales

III.2 Prolongement maximal de la branche

IV. ETUDE DE (II.3) EN GEOMETRIE HYPERSPHERIQUE

IV.1 Résultats analytiques élémentaires en dimension 1

IV.2 Etude numérique en dimension n

IV.3 Conjectures et conclusion

ANNEXE : Résultats numériques

I. INTRODUCTION ET MOTIVATION

La modélisation de phénomènes de diffusion-réaction en cinétique enzymatique hétérogène ou en combustion thermique, conduit, sous certaines hypothèses (cinétique d'Arrhénius, concentrations de certains constituants peu variables) à s'intéresser à l'équation suivante, où T représente le profil de température dans une enceinte Ω à l'état stationnaire :

$$(I.0) \quad \begin{cases} \Delta T + \mu e^{-\frac{E}{RT}} = 0 & \text{dans } \Omega \\ T = T_0 & \text{sur le bord de } \Omega \end{cases}$$

Pour une réaction exothermique élémentaire λ est positif ainsi que l'énergie d'activation E . En posant, dans ce cas $\varepsilon = \frac{RT_0}{E}$ et $T = T_0(1 + \varepsilon w)$ w est solution du problème suivant ($\lambda = \frac{\mu e}{T_0 \varepsilon} \geq 0$) :

$$(I.2) \quad \begin{cases} \Delta w + \lambda e^{\frac{w}{1+\varepsilon w}} = 0 & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Le problème (I.2) apparaît, pour les grandes énergies d'activation, comme une perturbation du problème de Frank-Kamenetskii (ou de Guelfand), limite formelle de (I.2) lorsque ε tend vers 0 :

$$(I.1) \quad \begin{cases} \Delta w + \lambda e^w = 0 & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Ce dernier problème a été étudié par maints auteurs, soit dans le cadre général, $-\Delta$ pouvant être remplacé par un opérateur elliptique linéaire du second ordre plus général ([38][44][67]), soit en géométrie hypersphérique où l'analyse est complète ([46][52]).

Le modèle (I.1) rentre dans la catégorie des problèmes à non-linéarité positive, croissante, convexe, alors que (I.2) est relatif à une non-linéarité positive, croissante, non convexe, mais bornée.

L'allure des diagrammes de bifurcation, c'est à dire des graphes des multi-applications $\lambda \rightarrow u(\lambda, .)$ est bien connue pour (I.1) et (I.2) (cf. [37] [77] et références de [77] ainsi que les figures à la fin de ce travail).

En fait, si une réaction se décompose en mécanismes élémentaires, le paramètre E , qui est alors une énergie d'activation apparente, peut être négatif (cf. [8] [71] pour le cas de composés azotés). Si de plus, la réaction est globalement endothermique, ce qui est compatible avec les autres hypothèses (*) (**) on est conduit à s'intéresser au problème suivant :

$$(I.4) \quad \begin{cases} -\Delta T + \mu e^{\frac{E}{RT}} = 0 & \text{avec } \lambda > 0 \text{ et } E > 0 \\ T = T_0 & \text{au bord} \end{cases}$$

qui, avec la transformation $T = T_0(1 - \varepsilon w)$, $\varepsilon = \frac{RT_0}{E}$ s'écrit sous la forme ($\lambda = \frac{\mu e^{1/\varepsilon}}{T_0} \geq 0$) :

$$(I.3) \quad \begin{cases} \Delta w + \lambda e^{\frac{w}{1-\varepsilon w}} = 0 & \text{dans } \Omega \text{ (avec } \varepsilon > 0) \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et rentre dans la catégorie des problèmes à non-linéarité positive, croissante, convexe sur un intervalle, $] -\infty, \frac{1}{\varepsilon} [$ de \mathbb{R} dont l'étude a été abordée dans [12] [67].

On se propose dans ce qui suit, après avoir rappelé les résultats connus concernant (I.1) et (I.2) (en donnant toutefois quelques compléments pour (I.2)), d'étudier le problème (I.3) du point de vue des branches de solutions, selon la dimension n de l'espace en faisant la comparaison avec (I.1) et (I.2).

(*) cela est, qualitativement, le cas lorsque la réaction limitante (i.e le mécanisme le plus lent) est fortement endothermique alors que les autres réactions sont globalement assez fortement exothermiques.

(**) Je remercie Michel Cournil, du Laboratoire de Chimie Physique de l'Ecole Des Mines de Saint-Etienne qui m'a montré l'intérêt d'étudier des modèles à énergie d'activation négative.

Des essais numériques en géométrie hypersphérique complètent l'étude. Pour $n = 1$ on peut faire un calcul analytique élémentaire pour décrire la situation.

En conclusion, on notera que (I.3) se comporte à peu près comme (I.1), à ceci près que les branches n'ont pas d'extension infinie relativement à u dans $C(\bar{\Omega})$; en fait, on met en évidence l'existence de points d'arrêt [13] pour (I.3), rejetés à l'infini pour (I.1). Les conjectures issues de l'examen des résultats numériques sont également exposées.

II. RAPPELS - QUELQUES RESULTATS NOUVEAUX

II.1. Hypothèses et notations

On considère un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^n de frontière $\partial\Omega$ régulière et l'opérateur du second ordre

$$Au = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}] + c(x) u$$

avec $a_{ij} \in C^2(\bar{\Omega})$, $c \in C^1(\bar{\Omega})$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $c(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$

$$\text{On pose } a(u,v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} c u v dx \text{ pour } u,v \in H^1(\Omega)$$

et on suppose la forme a coercive sur $H_0^1(\Omega)$: il existe $\alpha > 0$ tel que $a(u,u) \geq \alpha ||u||^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$

où $|| \cdot ||$ désigne la norme sur $H_0^1(\Omega)$ définie par :

$||w||^2 = |\nabla w|^2 = (\nabla w, \nabla w)$, (\cdot, \cdot) étant le produit scalaire usuel sur $L^2(\Omega)$ et $< \cdot, \cdot >$ représentant la dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$.

Avec ces notations, on définit les problèmes suivants, extensions respectives de (I.1), (I.2), (I.3) écrits sous une forme faible :

$$(II.1) \quad \begin{cases} a(u,v) = \lambda \langle e^u, v \rangle & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

$$(II.2) \quad \begin{cases} a(u,v) = \lambda \langle e^{\frac{u}{1+\epsilon u}}, v \rangle & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad \epsilon > 0$$

$$(II.3) \quad \begin{cases} a(u,v) = \lambda \langle e^{\frac{u}{1-\epsilon u}}, v \rangle & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad \epsilon > 0$$

On appelle solution de (II.1) (resp. II.3) toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $e^u \in H^{-1}(\Omega)$, (resp. $e^{\frac{u}{1-\epsilon u}} \in H^{-1}(\Omega)$). Pour (II.2) $e^{\frac{u}{1+\epsilon u}} \in L^2(\Omega)$ $\forall u \in H_0^1(\Omega)$, $u \geq 0$.

On s'intéresse aux solutions $u \geq 0$ sur Ω , donc nécessairement $\lambda \geq 0$ par le principe du maximum, et pour (II.3) on se limite aux solutions u telles que $0 \leq u(x) < \frac{1}{\epsilon}$.

II.2. Le problème (II.1)

$$(II.1) \quad \begin{cases} a(u,v) = \lambda \langle e^u, v \rangle \\ \forall v \in H_0^1(\Omega) ; u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

a) rappel de résultats pour un ouvert Ω quelconque de \mathbb{R}^n : les points suivants ont été démontrés ([38][67]) :

Il existe un nombre $\lambda^* \in]0, \lambda_1[$ critique au sens suivant, λ_1 étant la valeur propre fondamentale de A avec condition de Dirichlet :

1] pour $\lambda < \lambda^*$, (II.1) admet au moins une solution dans $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ donc régulière et, en fait, une solution minimum \underline{u} , l'application $\lambda \mapsto \underline{u}(\lambda, .)$ étant croissante sur $[0, \lambda^*[$

- 2] Pour $\lambda > \lambda^*$, (II.1) n'a pas de solution dans $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$
- 3] en $\lambda = \lambda^*$, $u^* = \lim_{\lambda \nearrow \lambda^*} \underline{u}(\lambda)$ (dans $H_0^1(\Omega)$ faible et presque partout),
 $e^{u^*} \in L^1(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega)$ et (λ^*, u^*) est solution de (II.1).
- 4] $\underline{u}(\lambda)$ converge vers u^* dans $W_2^p(\Omega)$ fort, $1 \leq p < 5$, $e^{\underline{u}(\lambda)}$ converge vers e^{u^*} dans L^p , $1 \leq p < 5$ et, si $n \leq 9$, $u^*, e^{u^*} \in L^\infty(\Omega)$.
 Dans ce cas, on a l'unicité en $\lambda = \lambda^*$ et (λ^*, u^*) est un point de retournement régulier ([37][38]) de (II.1).
- 5] Toute solution autre que la solution minimale \underline{u} est instable (pour le problème d'évolution associé), le domaine de stabilité de \underline{u} contient l'ensemble des conditions initiales u_0 telles que $u_0(x) < u(x)$ où u est une solution quelconque de (II.1). Si $u_0(x) \geq u(x) > \underline{u}(x)$, $u_0 \neq u$, la solution du problème d'évolution associé explose au bout d'un temps fini ou infini ([44]).
- 6] Si S désigne l'ensemble des solutions de (II.1) dans $\mathbb{R}_+ \times C(\bar{\Omega})$, on montre que S possède une composante connexe maximale contenant $(0,0)$ et non bornée en u , qui, en fait, prolonge l'arc $(\lambda, \underline{u}(\lambda))$ défini en 1] pour $\lambda \in [0, \lambda^* [$.

En effet l'équation (II.1) pour $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est équivalente à l'équation $u = \lambda G[e^u]$, $u \in C(\bar{\Omega})$ où G désigne l'opérateur de Green associé à A avec condition de Dirichlet. Il suffit ensuite d'appliquer le théorème 3.2 de [72] puisque l'application $T(\lambda, u) = \lambda G[e^u]$ est continue compacte sur $\mathbb{R} \times C(\bar{\Omega})$.

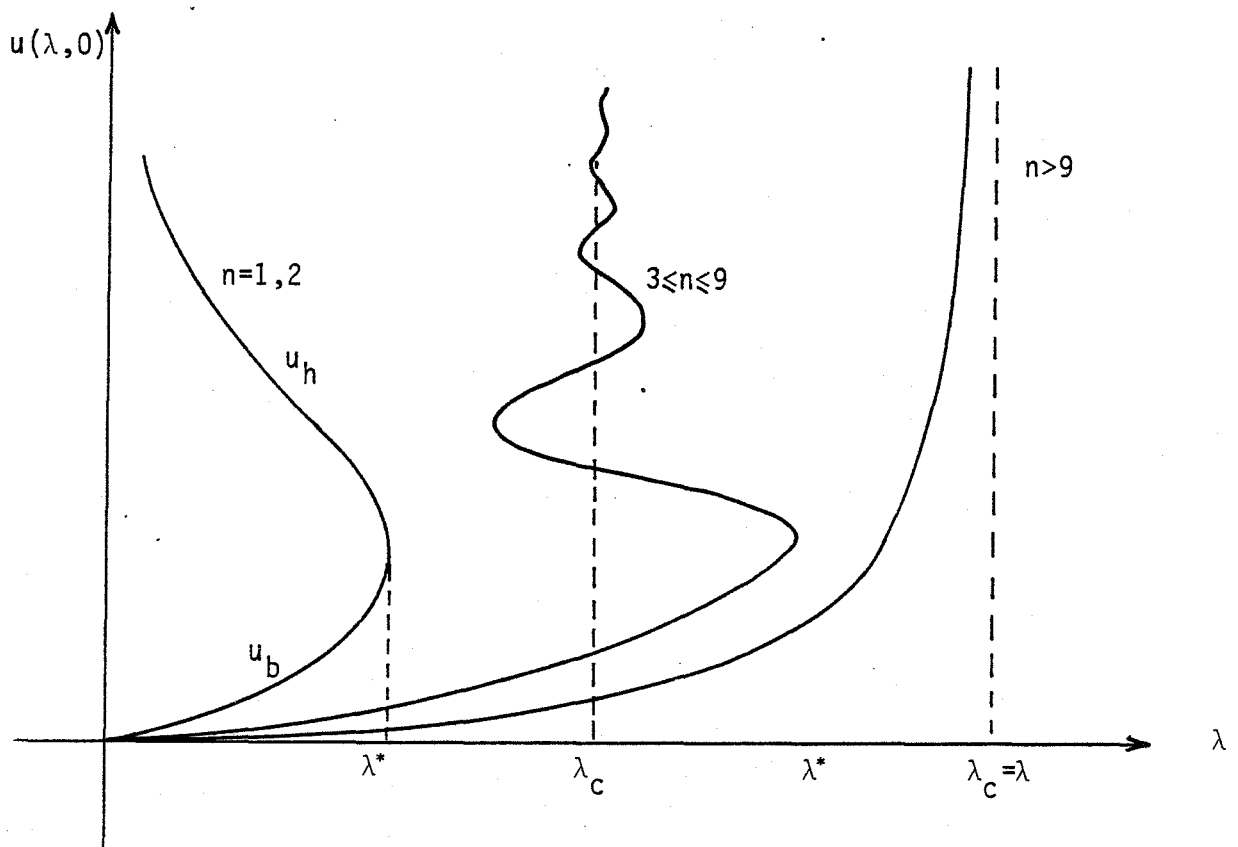
b) lorsque Ω est la boule unité de \mathbb{R}^n , $A = -\Delta$: comme les solutions, pour $\lambda < \lambda^*$ sont de classe C^2 et que $f(t) = e^t$ est de classe C^1 , elles ont nécessairement la symétrie radiale ([45]), et le problème (II.1) se met sous la forme :

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda e^u = u'' + \frac{n-1}{r} u' + \lambda e^u = 0 & 0 < r < 1 \\ u'(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

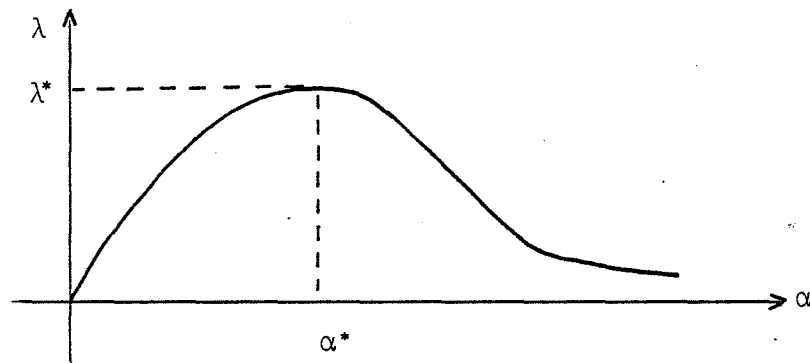
On peut préciser les résultats ci-dessus en considérant le diagramme de bifurcation $\lambda \rightarrow u(\lambda, 0) = \max_{\Omega} u(\lambda, x)$ puisque la donnée de $u(0)$ détermine de manière unique λ et la solution u de (II.1) (cf. § IV.2). Une étude par plan de phase donne une description complète du comportement du diagramme ([46] [52]).

- 1] pour $n = 1$ ou 2 , on a respectivement $2, 1$ ou 0 solutions selon que $\lambda < \lambda^*$, $\lambda = \lambda^*$, $\lambda > \lambda^*$
- 2] pour $3 \leq n \leq 9$, on n'a pas de solution pour $\lambda > \lambda^*$, une infinité de solutions pour $\lambda = \lambda_c = 2(n-2) < \lambda^*$, un nombre fini de solutions pour $\lambda \leq \lambda^*$, $\lambda \neq \lambda_c$
- 3] enfin, pour $n > 9$, on a une solution unique si $\lambda < \lambda^* = \lambda_c = 2(n-2)$, et pas de solution si $\lambda \geq \lambda^*$.

La figure ci-dessous illustre les cas 1], 2], 3].



Lorsque $n = 1$ ou 2 on a des expressions analytiques des solutions en fonction du paramètre $\alpha = u(0)$, qui est lié à λ par une relation implicite ([4]) ayant l'allure suivante :



Pour $n = 1$, $u(r)$ est déterminé par l'égalité :

$$\text{Log} \frac{1 + \sqrt{1 - e^{\frac{\alpha}{2} - u}}}{1 - \sqrt{1 - e^{\frac{\alpha}{2} - u}}} = \sqrt{2\lambda} e^{\frac{\alpha}{2}} r \quad \text{où } \lambda \text{ étant donné par :}$$

$$\sqrt{2\lambda} = e^{-\frac{\alpha}{2}} \text{Log} \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-\alpha}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-\alpha}}} \quad \text{avec } \alpha = u(0) \in [0, \infty[$$

Si u_b (resp. u_h) désigne la solution minimale (resp. maximale) on a immédiatement, avec $\alpha = u_b(\lambda, 0) \in [0, \alpha^*]$ (resp. $\alpha = u_h(\lambda, 0) \in [\alpha^*, +\infty[$) :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} u_b &= 0 \text{ sur } [0, 1], \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{u_b(r)}{u_b(0)} = 1 - r^2 \text{ sur } [0, 1] \\ &\text{et } \lambda \sim 2\alpha(\alpha \rightarrow 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} u_h(0) &= +\infty \text{ sur } [0, 1[, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{u_h(r)}{u_h(0)} = 1 - r \\ &\text{et } \lambda \sim \frac{\alpha^2 e^{-\alpha}}{2} \quad (\alpha \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Pour $n = 2$, $u(r)$ est déterminé par l'égalité :

$$e^u = \frac{(B+1)^2}{(Br^2+1)^2}, \quad \text{avec } \lambda = \frac{8B}{(B+1)^2} \leq 2$$

$$\text{où } B = e^{\alpha/2} - 1 \quad \text{avec } \alpha = u(0) \in [0, \infty[$$

Avec les notations ci-dessus on a alors immédiatement :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{\lambda \downarrow 0} u_b &= 0 \text{ sur } [0,1], \quad \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{u_b(r)}{u_b(0)} = 1 - r^2 \quad \text{et} \quad \lambda \sim 4\alpha(\alpha \downarrow 0) \\ \bullet \quad u_h(r) &\sim -4 \log r \text{ sur } [0,1[, \quad \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{u_h(r)}{u_h(0)} = 0 \text{ sur }]0,1] \\ &\text{et} \quad \lambda \sim 8 e^{-\alpha/2} \quad (\alpha \uparrow \infty). \end{aligned}$$

En dimension 1, on peut établir un résultat de convergence plus général pour la solution normalisée, et qui va se révéler utile pour les problèmes (II.2) et (II.3).

c) Un résultat général en dimension 1

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u'' + \lambda f(u) = 0 & 0 < r < 1 \\ u'(0) = 0 ; u(1) = 0 \end{cases}$$

avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ croissante, continue, vérifiant $f(0) > 0$. On sait qu'il existe une branche $(\lambda, u(\lambda))$ de solutions positives dans $\mathbb{R}_+ \times C([0,1])$, non bornée dans $C([0,1])$, éventuellement bornée en λ (par exemple si f est strictement convexe).

Comme on l'a déjà remarqué, la donnée de $u(0) = \alpha \in [0, \infty[$ définit parfaitement la solution de $u'' + \lambda f(u) = 0$, $u'(0) = 0$, $u(1) = 0$, et le paramètre λ . On peut donc paramétrer l'arc $(\lambda, u(\lambda))$ par α et on posera $u(\lambda, r) = u(\lambda(\alpha), r) = u(\alpha, r)$ avec $\alpha = u(\lambda, 0)$.



On cherche la limite de la solution normalisée $\frac{u(\alpha, r)}{\alpha}$ lorsque $\alpha = u(\alpha, 0) = \max_{[0,1]} u(\alpha, r)$ converge (vers 0 ou $+\infty$ en général) ou vers $\frac{1}{\varepsilon}$ dans le cas du problème (II.3), cf. remarque 2 ci-après).

Proposition II.1 : On pose $F(z) = \int_0^z f(t) dt$; on suppose que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{F(\alpha t)}{F(\alpha)} = g(t)$. Alors $\frac{1}{\sqrt{1-g}} \in L^1(0,1)$ et $\frac{u(\alpha, r)}{\alpha}$ converge dans $C(0,1)$ vers v_0 solution de : $G(v_0(r)) = G(1)(1-r)$ où $G(z) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-g(t)}}$, $0 \leq z \leq 1$

Preuve : On multiplie l'équation de départ par $u'(x)$ et on l'intègre de 0 à x , $x \in]0,1[$:

$$u'^2(x) + 2\lambda[F(u(x)) - F(\alpha)] = 0$$

Comme $u'(x) \leq 0$ ceci équivaut à :

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{F(\alpha) - F(u(x))}} = -\sqrt{2\lambda} \text{ qu'on intègre entre 0 et } r :$$

$$\sqrt{2\lambda} r = \int_{u(r)}^{\alpha} \frac{dt}{\sqrt{F(\alpha) - F(t)}} \text{ qui, pour } \alpha \text{ fixé, détermine une}$$

unique solution $u(r)$, λ étant donné par la condition :

$$u(1) = 0 \Rightarrow \sqrt{2\lambda} = \int_0^{\alpha} \frac{dt}{\sqrt{F(\alpha) - F(t)}}$$

Si on pose $u(r) = \alpha v(r)$ et $t = \alpha z$ dans les intégrales ci-dessus, on obtient :

$$\sqrt{2\lambda} = \frac{\alpha}{\sqrt{F(\alpha)}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - \frac{F(\alpha z)}{F(\alpha)}}}$$

$$\sqrt{2\lambda} r = \frac{\alpha}{\sqrt{F(\alpha)}} \int_{v(r)}^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - \frac{F(\alpha z)}{F(\alpha)}}} \implies$$

$$\int_{v(r)}^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - \frac{F(\alpha z)}{F(\alpha)}}} = r \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - \frac{F(\alpha z)}{F(\alpha)}}}$$

Comme F est convexe et $F(0) = 0$, on a $\frac{F(\alpha z)}{F(\alpha)} < z$

et $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{F(\alpha z)}{F(\alpha)}}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-z}} \in L^1(0,1)$, on peut passer à la limite dans la

relation intégrale ci-dessus ce qui donne, en supposant que $v(r) \rightarrow v_0(r)$:

$$\int_{v_0(r)}^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - g(z)}} = r \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - g(z)}} \quad \text{i.e.}$$

$$G(1) - G(v_0(r)) = r G(1)$$

Or $v = v_\alpha$ converge dans $C(0,1)$; en effet, écrivant l'équation qui donne v :
 $v'' + \frac{\lambda}{\alpha} f(\alpha v) = 0$, multipliant par v' et intégrant entre 0 et r , on obtient :

$$0 = v'^2(r) + \frac{2\lambda}{\alpha^2} \int_0^r f(\alpha v(x)) \alpha v'(x) dx \implies 0 \leq v'^2(r) \leq \frac{4\lambda}{\alpha^2} F(\alpha) \leq \\ \leq 2 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z}} < +\infty; v \text{ étant dans un borné de } C^1(0,1),$$

va converger dans $C^0(0,1)$ après éventuellement une extraction et comme le problème limite a une solution unique, toute la suite converge.

□

Remarque 1 : La proposition (II.1) redonne les résultats de convergence de $\frac{u_h(\lambda, r)}{u_h(\lambda, 0)}$ ($\alpha = \infty$) et $\frac{u_b(\lambda, r)}{u_b(\lambda, 0)}$ ($\alpha = 0$) pour le problème (II.1) en dimension 1 :

$f(t) = e^t$, $F(t) = e^t - 1$ donc $\frac{F(\alpha z)}{F(\alpha)} \rightarrow 0$ si $\alpha \rightarrow \infty$, $\frac{F(\alpha z)}{F(\alpha)} \rightarrow z$ si $\alpha \rightarrow 0$ et

$G(z) = z$ si $\alpha_0 = \infty$, $G(z) = 1 - \sqrt{1-z}$ si $\alpha_0 = 0$.

Remarque 2 : Le résultat est valable lorsque f est définie et continue seulement sur un ouvert $] - \infty, \eta [$, $\eta > 0$ avec $\alpha \in]0, \eta [$, $\alpha_0 \in [0, \eta]$, et s'appliquera au problème (II.3). On peut aussi l'appliquer au problème traité dans [12] avec $f(t) = \frac{1}{1-t}$.

II.3. Rappels et compléments concernant le problème (II.2.)

$$(II.2) \left\{ \begin{array}{l} a(u,v) = (\lambda e^{\frac{u}{1+\varepsilon u}}, v) \\ \forall v \in H_0^1(\Omega) ; u \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$

On fixe $\varepsilon > 0$ et on étudie les solutions en fonction de $\lambda \geq 0$.

Soit U_0 la solution du problème suivant :

$$AU_0 = 1 \text{ dans } \Omega ; U_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

Il est clair que toute solution u de (II.2.) vérifie :

$$0 \leq \lambda U_0 \leq u \leq \lambda e^{1/\varepsilon} U_0$$

Comme 0 (resp. $\lambda e^{1/\varepsilon} U_0$) est sous-(resp. sur-) solution pour (II.2.), on a existence d'une solution ([55] [75]) pour tout λ et en fait existence d'une solution minimale $\underline{u}(\lambda)$ et d'une solution maximale $\bar{u}(\lambda)$. D'après les résultats généraux de [37] [38], il existe un nombre critique $\lambda^*(\varepsilon) \leq +\infty$, maximal vis à vis de la propriété d'inversibilité de l'opérateur

$$w \mapsto Aw - \lambda \frac{e^{\frac{\underline{u}(\lambda)}{1+\varepsilon \underline{u}(\lambda)}}}{(1+\varepsilon \underline{u}(\lambda))^2} w, \text{ l'application } \lambda \mapsto \underline{u}(\lambda) \text{ est croissante}$$

et continue à gauche de \mathbb{R}_+ dans $C^2(\bar{\Omega})$.

Remarque : On démontre aisément, par exemple en reprenant le schéma itératif monotone définissant $\underline{u}(\lambda)$, que l'application $\varepsilon \mapsto u(\lambda, \varepsilon, x)$ est décroissante $\forall \lambda \geq 0, x \in \Omega$ fixés.

Proposition II.2. : Si $\lambda^* = \lambda^*(0) < \infty$ désigne le nombre critique relatif au problème (II.1.), on a $\lambda^*(\varepsilon) \geq \lambda^*$

Preuve : Soit $\lambda < \lambda^*$, $\underline{u}_0(\lambda)$ la solution minimale du problème (II.1.) :

$$A\underline{u}_0 = \lambda e^{\frac{\underline{u}_0}{1+\varepsilon \underline{u}_0}} \geq \lambda e^{\frac{\underline{u}_0}{1+\varepsilon \underline{u}_0}} \text{ donc } \underline{u}_0 \text{ est sur-solution du problème (II.2.) ce qui implique } \underline{u}(\lambda) \leq \underline{u}_0(\lambda). \text{ Soit } v(\lambda, \varepsilon, \underline{u}) \text{ la valeur propre fondamentale du problème suivant :}$$

$$Aw - \lambda \frac{e^{\frac{\underline{u}(\lambda)}{1+\varepsilon\underline{u}(\lambda)}}}{(1+\varepsilon\underline{u}(\lambda))^2} w = v w \quad w \in H_0^1(\Omega) ; w \neq 0$$

On pose $V = \{w \in H_0^1(\Omega) / |w| = 1\}$

$$v(\lambda, \varepsilon, \underline{u}) = \inf \left\{ a(w, w) - \lambda \frac{e^{\frac{\underline{u}}{1+\varepsilon\underline{u}}}}{(1+\varepsilon\underline{u})^2} w, w \right\} / w \in V$$

$$\geq \inf \{ a(w, w) - \lambda (e^{\frac{\underline{u}}{1+\varepsilon\underline{u}}} w, w) / w \in V \} \geq \inf \{ a(w, w) - \lambda (e^{\frac{\underline{u}_0}{1+\varepsilon\underline{u}_0}} w, w) / w \in V \}$$

$$= v(\lambda, 0, \underline{u}_0) > 0 \text{ car } \lambda < \lambda^* \text{ donc l'opérateur } w \mapsto Aw - \lambda \frac{e^{\frac{\underline{u}(\lambda)}{1+\varepsilon\underline{u}(\lambda)}}}{(1+\varepsilon\underline{u}(\lambda))^2} w$$

est inversible sur $[0, \lambda^*[$ ce qui implique $\lambda^*(\varepsilon) \geq \lambda^* \square$

Proposition II.3. : Soit $\varepsilon > 0$ fixé et λ_1 la valeur propre fondamentale de l'opérateur A avec condition de Dirichlet homogène. Si $\lambda < \lambda_1 e^{-1/\varepsilon}$, le problème (II.2.) admet une solution unique.

Preuve : $w = \bar{u}(\lambda) - \underline{u}(\lambda)$ vérifie :

$$Aw - \lambda \frac{e^{\frac{z(x)}{1+\varepsilon z(x)}}}{(1+\varepsilon z(x))^2} w = 0 \quad \text{avec} \quad \underline{u}(x) \leq z(x) \leq \bar{u}(x)$$

$$\text{donc } a(w, w) - \lambda \frac{e^{\frac{z}{1+\varepsilon z}}}{(1+\varepsilon z)^2} w, w = 0 \text{ ..Supposons } w \neq 0 :$$

L'expression ci-dessus est minorée par :

$$a(w, w) - \lambda e^{1/\varepsilon} (w, w) \geq \inf \{ a(w, w) - \lambda e^{1/\varepsilon} (w, w) / w \in V \} |w|^2 > 0$$

dès que $\lambda e^{1/\varepsilon}$ est inférieur à λ_1 , valeur propre fondamentale de l'opérateur A avec conditions de Dirichlet, donc $w \equiv 0 \square$

Remarque : Pour $\epsilon \leq 1/4$ on a l'unicité pour $0 \leq \lambda < \frac{\lambda_1}{4\epsilon^2 e^{(1-2\epsilon)/\epsilon}}$ ce qui

améliore quelque peu l'estimation donnée dans la preuve de la proposition II.3. Ce résultat provient du fait que $f'(t) \leq f'(\frac{1-2\epsilon}{2\epsilon^2}) = 4\epsilon^2 e^{(1-2\epsilon)/\epsilon}$ lorsque $\epsilon \leq 1/4$.

Proposition II.4. : Pour $\epsilon > 1/4$, le problème (II.2.) admet toujours une solution unique quel que soit λ .

Preuve : On adapte une idée de Cohen-Laetsch ([31]) : soit $\underline{u}(\lambda)$ la solution minimale et $u(\lambda)$ une autre solution : $u \geq \underline{u}$, $u \neq \underline{u}$.

$$Lu = \lambda e^{\frac{u}{1+\epsilon u}}$$

$$L\underline{u} = \lambda e^{\frac{\underline{u}}{1+\epsilon \underline{u}}}$$

donc $L(u - \underline{u}) \geq 0$ et $L(u - \underline{u}) \neq 0$;

on conclut, par le principe du maximum fort que $u > \underline{u}$ sur Ω

On multiplie ensuite les équations ci-dessus par, respectivement, \underline{u} et u , et on fait la différence ; (on peut supposer $\lambda > 0$ donc u et $\underline{u} > 0$ sur Ω)

$$\lambda \int_{\Omega} \underline{u} u \left[\frac{e^{\frac{u}{1+\epsilon u}}}{u} - \frac{e^{\frac{\underline{u}}{1+\epsilon \underline{u}}}}{\underline{u}} \right] dx = 0$$

La fonction $g(t) = \frac{e^{t/(1+\epsilon t)}}{t}$ a pour dérivée

$$g'(t) = - \frac{e^{\frac{t}{1+\epsilon t}}}{t^2(1+\epsilon t)^2} [\epsilon^2 t^2 + (2\epsilon - 1)t + 1] < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

pour $\epsilon > 1/4$; l'égalité intégrale est alors une contradiction si $u \neq \underline{u}$ \square

Remarques :

- 1] Pour $\epsilon \geq 1/2$ la non-linéarité $f(t) = e^{t/(1+\epsilon t)}$ est concave (en particulier $f(t)/t$ est décroissante) et, dans ce cas, on peut utiliser le résultat d'unicité de [55].

- 2] On n'a donc jamais de point de retournement pour $\epsilon > 1/4$ et ceci quel que soit le domaine.
- 3] Les résultats numériques connus (cf. aussi ceux figurant dans ce travail) semblent indiquer que la valeur $\epsilon = 1/4$ est optimale pour l'unicité, lorsque on choisit $L = -\Delta$, $n = 1$, $\Omega =]-1,1[$.

Proposition II.5 : Pour λ assez grand, le problème (II.2) admet toujours une solution unique $u(\lambda) = \underline{u}(\lambda) = \bar{u}(\lambda)$ et en fait $v(\lambda, \epsilon, \underline{u}) > 0$ pour λ assez grand.

Preuve : Le résultat est valable si on remplace $e^{t/1+\epsilon t}$ par une fonction $f(x, t, \epsilon)$ régulière, vérifiant les conditions :

$$(i) \quad f(x, t, \epsilon) \geq m(\epsilon) > 0$$

$$(ii) \quad f_t(x, t, \epsilon) \leq \frac{\alpha(\epsilon)}{\beta(\epsilon) + t^s} \quad \text{avec } \alpha \geq 0, \beta \geq 0 \quad 1 < s \leq 2$$

$$(iii) \quad f \text{ croissante en } t, f(x, t, \epsilon) \leq M(\epsilon)$$

$$(\text{ici } m(\epsilon) = 1, M(\epsilon) = e^{1/\epsilon}, \alpha(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2} e^{1/\epsilon}, \beta(\epsilon) = 1/\epsilon^2, s = 2)$$

Nous faisons la preuve dans ce cadre général où toutes les solutions de (II.2) tendent vers $+\infty$ p.p. lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$. Soit $v(\lambda, \epsilon, u)$ la valeur propre fondamentale du problème :

$$\begin{cases} \Delta w - \lambda f_t(x, u, \epsilon) w = v w \\ w \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Rappelons que si U_0 désigne la solution de :

$$\begin{cases} \Delta U_0 = 1 \text{ dans } \Omega \\ U_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On a $u \geq \lambda m(\epsilon) U_0$ pour toute solution (u, λ) de (II.2).

Il s'agit de montrer que $v(\lambda, \varepsilon, u) =$
 $\inf \{a(w, w) - \lambda(f_t(x, u, \varepsilon)w, w) / w \in H_0^1(\Omega), |w| = 1\} \geq \eta > 0$
 pour λ assez grand, ou ce qui revient au même :

$$a(w, w) - \lambda(f_t(x, u, \varepsilon)w, w) \geq \eta |w|^2 \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

Il suffit évidemment de montrer que $a(w, w) - \lambda(f_t(x, u, \varepsilon)w, w) \geq \tilde{\eta} \|w\|_H^2$
 $\forall w \in H = W_0^{2+\varepsilon, \infty}(\Omega)$ qui est dense dans $H_0^1(\Omega)$, i.e que $\tilde{v}(\lambda, \varepsilon, u)$

$$\begin{aligned} &= \inf \{a(w, w) - \lambda(f_t(x, u, \varepsilon)w, w) / \|w\|_H = 1\} \geq \\ &\geq \inf \{a(w, w) - \alpha(\varepsilon) \int_{\Omega} \frac{\lambda w^2}{\beta(\varepsilon) + \lambda S_m(\varepsilon) S_{U_0}^S} dx / \|w\|_H = 1\} \geq \\ &\geq \alpha - \alpha(\varepsilon) \sup \left\{ \int_{\Omega} \frac{\lambda w^2}{\beta(\varepsilon) + \lambda S_m(\varepsilon) S_{U_0}^S} dx / \|w\|_H = 1 \right\} \\ &= \alpha - \alpha(\varepsilon) \sup \{\phi_{\lambda}(w^2), \|w\|_H = 1\} > 0 \end{aligned}$$

On commence par montrer que l'intrégrale $\phi_{\lambda}(z)$ tend vers 0 lorsque $z \in H_0^2(\Omega)$ est fixé.

Comme U_0 est > 0 p.p sur Ω , l'intégrand tend vers 0 p.p. sur Ω lorsque $\lambda \uparrow \infty$. De plus, on a la majoration :

$$\frac{\lambda z(x)}{\beta(\varepsilon) + \lambda S_m(\varepsilon) S_{U_0}^S} \leq \frac{\lambda^{1-s}}{m(\varepsilon)^s} \frac{z}{U_0^S} \leq C \text{ te } \frac{z}{U_0^S} \in L^1(\Omega)$$

car, d'après le principe du maximum de Hopf, la dérivée normale de U_0 sur le bord $\partial\Omega$ est > 0 donc $U_0(x)$ se comporte comme $d(x, \partial\Omega)$ au voisinage du bord.

On peut donc appliquer le théorème de Lebesgue qui prouve que
 $\lim_{\lambda \uparrow \infty} \phi_{\lambda}(z) = 0$ pour tout z fixé dans $H_0^2(\Omega)$.

La forme linéaire $z \in H_0^2(\Omega) \rightarrow \phi_{\lambda}(z)$ est continue pour tout λ et
 $\lim_{\lambda \uparrow \infty} \phi_{\lambda}(z) = 0$.

Or si $\|w\|_H = 1$, w reste dans un compact de $W_0^{2,p}(\Omega)$ et $z = w^2$ reste dans un compact de $H_0^2(\Omega)$.

En vertu du théorème de Banach-Steinhaus, $\phi_\lambda(z)$ tend vers 0 lorsque $\lambda \rightarrow \infty$, uniformément lorsque z reste dans un compact de $H_0^2(\Omega)$. Donc

$$\sup \left\{ \int_{\Omega} \frac{\lambda w^2}{\beta(\epsilon) + m(\epsilon) S_{U_0}} dx \mid \|w\|_H = 1 \right\} \rightarrow 0 \text{ lorsque } \lambda \rightarrow \infty$$

ce qui prouve bien que $v(\lambda, \epsilon, u) > 0$ pour λ assez grand.

Pour l'unicité, on pose $w = \bar{u}(\lambda) - \underline{u}(\lambda)$:

$$Aw = \lambda f_t(x, \xi, \epsilon)w \text{ avec } \underline{u}(x) \leq \xi(x) \leq \bar{u}(x)$$

$$a(w, w) = \lambda (f_t(x, \xi, \epsilon)w, w) \text{ donc}$$

$$0 \geq v(\lambda, \epsilon, \xi) |w|^2$$

Comme $\xi \geq \underline{u} \geq \lambda m(\epsilon) U_0$ la démonstration ci-dessus s'applique en remplaçant u par ξ , on a $v(\lambda, \epsilon, \xi) > 0$ pour λ assez grand et par conséquent $w = 0$ pp. \square

Remarques:

- 1] Le résultat concernant $v(\lambda, \epsilon, u)$ implique l'existence d'une branche continue $\lambda \in]\lambda^{**}(\epsilon), +\infty[\rightarrow \bar{u}(\lambda)$, croissante, telle que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} |\bar{u}(\lambda)|_\infty = +\infty$, $\lambda^{**}(\epsilon) \in [0, \infty)$ étant maximal vis à vis de l'inversibilité de l'opérateur

$$w \mapsto Aw - \lambda \frac{e^{\bar{u}/(1+\epsilon\bar{u})}}{(1+\epsilon\bar{u})^2} w$$

avec conditions de Dirichlet au bord.

- 2] Qualitativement, en utilisant les résultats de perturbation du chapitre II sur la variation des points de retournement, on aura, pour ϵ assez petit, un point de retournement au moins pour $n \leq 9$ donc automatiquement un deuxième point de retournement. Dans ce cas $\lambda^*(\epsilon)$ défini au début du paragraphe II.3. est fini.

- 3] En fait, si $\lambda^*(\epsilon) < +\infty$, c'est un point de retournement et le premier en partant de (0,0) sur la branche minimale par définition de $\lambda^*(\epsilon)$: en effet, $u^*(\epsilon) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda^*(\epsilon)} u(\epsilon, \lambda)$ existe dans $C(\overline{\Omega})$ car $u(\epsilon, \lambda)$ est borné dans $C^1(\overline{\Omega})$ puisque $L u(\epsilon, \lambda) = \lambda e^{u/(1+\epsilon u)}$ l'est dans $W^{2,p}(\Omega)$ et il suffit d'appliquer les résultats généraux de [37] [38] pour voir que $(\lambda^*(\epsilon), u^*(\epsilon))$ est un point de retournement. Ce point est non dégénéré si, w désignant une solution non triviale du problème :

$$A_w = \frac{\lambda^*(\epsilon) e^{\frac{u^*(\epsilon)}{1+\epsilon u^*(\epsilon)}}}{(1+\epsilon u^*(\epsilon))^2} w$$

qu'on peut choisir > 0 , on a la condition :

$$\int_{\Omega} w^3 (e^{\frac{t}{1+\epsilon t}})_{t=u}'' dx \neq 0$$

ce qui est sûrement réalisé si $e^{t/(1+\epsilon t)}$ est convexe pour $t \leq |u^*(\epsilon)|_{\infty}$, donc si $|u^*(\epsilon)|_{\infty} < \frac{1-2\epsilon}{2\epsilon^2}$.

On donne, pour terminer les compléments relatifs au problème (II.2), deux résultats d'estimation de $\lambda^*(\epsilon)$.

Proposition II.6 : Soit $\epsilon_0 \leq \epsilon < 1/4$. On suppose que $\lambda^*(\epsilon_0) < \infty$ et que $\|u^*(\epsilon_0)\|_{\infty} \leq \frac{1-2\epsilon}{2\epsilon^2}$. Alors $\lambda^*(\epsilon_0) \leq \lambda^*(\epsilon) \leq +\infty$

Preuve : Soit $\lambda < \lambda^*(\epsilon_0)$. On voit immédiatement que $u(\epsilon_0, \lambda, \cdot)$ est une sursolution pour (II;2) avec ϵ , donc $u(\epsilon_0, \lambda, x) \geq u(\epsilon, \lambda, x)$.

Par définition de la maximalité de $\lambda^*(\epsilon_0)$ nous avons : $\lambda < \mu(\lambda, \epsilon_0) =$

$$\inf_{w \in V} \left\{ \frac{a(w, w)}{(f_t(u(\lambda, \epsilon_0, \cdot)), \epsilon_0) w, w)} \right\}$$

$$\text{où } V = \{ w \in H_0^1(\Omega) / \int_{\Omega} w^2 dx = 1 \}$$

$$\leq \inf_V \left\{ \frac{a(w,w)}{(f_t(\underline{u}(\epsilon, \lambda, \cdot), \epsilon_0)w, w)} \right\}$$

(à cause de la convexité de f sur $[0, \frac{1-2\epsilon}{2\epsilon^2}]$)

$$\leq \inf_V \left\{ \frac{a(w,w)}{(f_t(\underline{u}(\epsilon, \lambda, \cdot), \epsilon)w, w)} \right\}$$

($\epsilon \rightarrow f(t, \epsilon)$ est décroissante) qui est, par définition $\mu(\lambda, \epsilon)$ donc
 $\lambda < \mu(\lambda, \epsilon)$. \square

Soient Ω ouvert borné régulier et B_R la boule ouverte de rayon R centrée en 0 (par exemple !). Les quantités relatives au problème (II.2) pour Ω (resp. B_R) seront considérées comme fonctions de Ω (resp. R) et notées en conséquence.

Proposition II.7 : Soit $\Omega \subset B_R$. On suppose que $\lambda^*(\epsilon, R) < \infty$ et que $\|u^*(\epsilon, R)\|_\infty < 1-2\epsilon/2\epsilon^2$. Alors $\lambda^*(\epsilon, \Omega) \geq \lambda^*(\epsilon, R)$.

Preuve : Soit $\lambda < \lambda^*(\epsilon, R)$. Puisque $\underline{u}(\lambda, \epsilon, R)|_\Omega$ est une sur-solution de (II.2) $_\Omega$, la fonction v , égale à $\underline{u}(\lambda, \epsilon, \Omega)$ dans Ω , nulle sur $B_R \setminus \Omega$ vérifie : $v \leq \underline{u}(\lambda, \epsilon, R)$ sur B_R et $\mu(\lambda, \epsilon, \Omega) =$

$$\begin{aligned} &= \inf_V \left\{ \frac{a(w,w)}{(f_t(\underline{u}(\lambda, \epsilon, \Omega), \epsilon)w, w)} \right\} \\ &\geq \inf_V \left\{ \frac{a(w,w)}{(f_t(v, \epsilon)w, w)} \right\} \\ &\geq \inf_V \left\{ \frac{a(w,w)}{(f_t(\underline{u}(\lambda, \epsilon, R), \epsilon)w, w)} \right\} \\ &= \mu(\lambda, \epsilon, R) > \lambda \quad \square \end{aligned}$$

Ce résultat tient au fait que les solutions minimales sont fonction croissante du domaine (pour les restrictions à un domaine commun, cf [5]); il est vrai si B_R est remplacé par un domaine $\Omega' \supset \Omega$.

Remarques :

- 1] Il serait intéressant de définir une valeur limite ϵ_0 en dessous de laquelle on soit assuré d'avoir un retournement. Cette question est examinée dans [43] moyennant une hypothèse traduisant l'absence de variations brusques de u selon x , mais, malheureusement, on n'obtient pas une estimation quantitative du ϵ_0 (à cause de la constante inconnue intervenant dans l'hypothèse); ce problème reste donc ouvert, semble-t-il.
- 2] Pour $n = 1$, $\Omega =]-1, 1[$ et $A = -\Delta$ on montre, en utilisant la proposition (II.1) que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{u(\lambda, x)}{u(\lambda, 0)} = 1 - x^2$ comme pour le problème (II.1) avec $f(t) = e^t$. Mais $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{u(\lambda, x)}{u(\lambda, 0)} = 1 - x^2$ et non plus $1 - x$ comme pour (II.1) et $\lambda \sim 2\alpha e^{-1/\epsilon}$ avec $\alpha = u(0)$.
En fait, c'est vraisemblablement la solution normalisée $\frac{\bar{u}(\lambda^{**}, x)}{\bar{u}(\lambda^{**}, 0)}$ qui converge singulièrement, λ^{**} étant le deuxième (et dernier) point de retournement de la branche en partant de $(0, 0)$.

III. ETUDE QUALITATIVE DU PROBLEME (II.3)

On considère maintenant le problème suivant :

$$(II.3) \quad \begin{cases} a(u, v) = \lambda < e^{\frac{u}{1-\epsilon u}}, v > \\ \forall v \in H_0^1(\Omega) ; u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

avec $\lambda \geq 0$, $\epsilon > 0$. On posera $f(t) = f(t, \epsilon) = e^{\frac{t}{1-\epsilon t}}$. On cherche des solutions (λ, u) de (II.3) vérifiant :

$$0 \leq u(x) < \frac{1}{\epsilon} \quad \forall x \in \Omega$$

III.1 Etude de la branche de solutions minimales

La fonction $f :]-\infty, 1/\epsilon[\rightarrow [0, +\infty[$ est positive, dérivable,

$$f'(t) = \frac{e^{\frac{t}{1-\epsilon t}}}{(1-\epsilon t)^2} \text{ est } > 0 \text{ et, en fait } f \text{ est strictement convexe sur } [0, \frac{1}{\epsilon}[$$

$$\text{avec } f''(t) = \frac{e^{\frac{t}{1-\epsilon t}}}{(1-\epsilon t)^4} [1 + 2\epsilon - 2\epsilon^2 t]$$

Comme dans [12] et [67], par application du théorème des fonctions implicites à l'équation $Au = \lambda e^{\frac{u}{1-\epsilon u}}$ sur l'ouvert

$$\{ \lambda \geq 0 ; u \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) / |u|_\infty < \frac{1}{\epsilon} \}$$

avec $p > 2$ tel que $W^{2,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, on obtient les résultats suivants :

Il existe $\lambda^*(\epsilon) \in]0, \lambda_1]$ où λ_1 est la valeur propre fondamentale de l'opérateur A avec conditions de Dirichlet, vérifiant les propriétés suivantes :

- 1] Pour $\lambda \in [0, \lambda^*(\epsilon)[$ (II.3) admet au moins une solution positive $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \quad \forall p > 2$, telle que $|u|_\infty < 1/\epsilon$ et, en fait une solution minimale $\underline{u}(\lambda, \epsilon)$ satisfaisant aux mêmes conditions. L'application $\lambda \rightarrow \underline{u}(\lambda, \epsilon)$ est croissante et régulière sur $[0, \lambda^*(\epsilon)[$ et $\lambda < \lambda^*(\epsilon) \leq \mu(\lambda, \epsilon)$ où $\mu(\lambda, \epsilon)$ est la valeur propre fondamentale de l'opérateur $A - \mu f_t(\underline{u}(\lambda, \epsilon), \epsilon)$:

$$\mu(\lambda, \epsilon) = \inf_{w \in V} \left\{ \frac{a(w, w)}{(f_t(\underline{u}(\lambda, \epsilon), \epsilon)w, w)} \right\}$$

(rappelons que $V = H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ ou $\{w \in H_0^1(\Omega) / |w| = 1\}$)

La relation $\lambda \leq \mu(\lambda, \epsilon)$ signifie que la branche minimale $\lambda \rightarrow \underline{u}(\lambda, \epsilon)$ est stable au sens de la stabilité linéarisée.

- 2] Pour $\lambda > \lambda^*(\epsilon)$, (II.3) n'admet pas de solution $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $|u|_\infty < 1/\epsilon$
- 3] $\underline{u}(\lambda, \epsilon)$ est l'unique solution de (II.3) vérifiant les conditions de 1] , c'est-à-dire l'unique solution stable régulière

- 4] Lorsque $\lambda \uparrow \lambda^*(\epsilon)$, $\underline{u}(\lambda, \epsilon) \uparrow u^*(\epsilon)$ pp. et dans $H_0^1(\Omega)$ faible, $f(\underline{u}(\lambda, \epsilon), \epsilon) \uparrow f(u^*(\epsilon), \epsilon)$ dans $L^1(\Omega)$ et dans $H^{-1}(\Omega)$ faible et $(\lambda^*(\epsilon), u^*(\epsilon))$ vérifie :

$$a(u^*(\epsilon), w) = \lambda^*(\epsilon) < f(u^*(\epsilon), \epsilon), w > \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \quad (*).$$

Comme $e^{\frac{u^*}{1-\epsilon u^*}} \in L^1(\Omega)$, on a $u^*(\epsilon) \in L^p(\Omega) \quad \forall p > 2$ (mais pas $L^\infty(\Omega)$!).

On va démontrer un résultat plus précis pour la convergence de $\underline{u}(\lambda, \epsilon)$ vers $u^*(\epsilon)$ qui impliquera que, lorsque la dimension de l'espace n'est pas trop grande, $(\lambda^*(\epsilon), u^*(\epsilon))$ est une solution régulière de (II.3), et, en fait, un point de retournement régulier pour le problème (II.3).

Proposition III.1 : La convergence de $\underline{u}(\lambda, \epsilon)$ vers $u^*(\epsilon)$ lorsque $\lambda \uparrow \lambda^*(\epsilon)$ a lieu dans $W_2^p(\Omega)$, $p < 5$ donc dans $L^\infty(\Omega)$ pour $n \leq 9$. Dans ce dernier cas, $(\lambda^*(\epsilon), u^*(\epsilon))$ est un point de retournement régulier pour l'équation (II.3) : pour $\lambda < \lambda^*(\epsilon)$, (II.3) admet localement deux solutions $u_1 = \underline{u}$ et $u_2 \geq \underline{u}$, $u_2 \neq \underline{u}$, régulières. De plus $\lambda^*(\epsilon) = \mu(\lambda^*(\epsilon), \epsilon)$.

Preuve : Supposons que l'on ait établi que

$$f(u^*(\epsilon), \epsilon) \in L^p(\Omega), \quad \forall p \in [1, 5[$$

Puisque $f(\underline{u}(\lambda, \epsilon), \epsilon) \uparrow f(u^*(\epsilon), \epsilon)$ si $\lambda \uparrow \lambda^*(\epsilon)$ on aura, par le théorème de Lebesgue, la convergence dans $L^p(\Omega)$ de $f(\underline{u}(\lambda, \epsilon), \epsilon)$, donc par les estimations de régularité classiques $\underline{u}(\lambda, \epsilon) \rightarrow u^*(\epsilon)$ dans $W^{2,p}(\Omega)$. On utilise ensuite le résultat d'inclusion (compacte) classique :

$$W^{2,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \quad \text{si} \quad \frac{1}{p} - \frac{2}{n} < 0 \quad \text{i.e.} \quad n < 2p$$

ce qui donne la borne sur la dimension (on a aussi, pour la régularité, $u^*(\epsilon) \in C^j(\overline{\Omega})$ avec $0 < j < 2 - \frac{n}{p}$ pour $n < 2p$).

- (*) et on peut dire, en un sens à préciser (cf [67] théorème 2) que $\lambda^*(\epsilon) \leq \mu(\lambda^*(\epsilon), \epsilon)$.

On a enfin $|u^*(\epsilon)|_\infty < 1/\epsilon$ donc, par la proposition 3 de [67]
 $\lambda^*(\epsilon) = \mu(\lambda^*(\epsilon), \epsilon)$.

Soit ϕ une solution non nulle du problème :

$$\begin{cases} A \phi = \lambda^*(\epsilon) f_t(u^*(\epsilon), \epsilon) \phi \\ \phi \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

alors ϕ peut être choisi > 0 sur Ω , par conséquent

$$\int_{\Omega} f(u^*(\epsilon), \epsilon) \phi \, dx > 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} f_{tt}(u^*(\epsilon), \epsilon) \phi^3 \, dx > 0$$

et par des résultats standard [37] [38] on aura un point de retournement régulier : au voisinage de $(\lambda^*(\epsilon), u^*(\epsilon))$ les solutions de (II.3) pour $\lambda < \lambda^*(\epsilon)$ peuvent être paramétrées de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \lambda(s) &= \lambda^*(\epsilon) + \tau(s) \\ u(s) &= u^*(\epsilon) + s \phi + z(s) \\ \text{avec } \tau(0) &= \tau'(0) = 0, \tau''(0) = - \lambda^*(\epsilon) \frac{\int_{\Omega} f_{tt}(u^*(\epsilon), \epsilon) \phi^3 \, dx}{\int_{\Omega} f(u^*(\epsilon), \epsilon) \phi \, dx} < 0 \end{aligned}$$

$z(s)$ dans un supplémentaire du noyau $\mathbb{R} \phi$, $z(0) = z'(0) = 0$.

Pour $\lambda = \lambda(s) < \lambda^*(\epsilon)$, l'équation $\tau(s) = - \lambda^*(\epsilon) + \lambda$ aura deux solutions, l'une $s_1 < 0$ correspondant à $u(s_1) = \underline{u}(\lambda)$ et l'autre s_2 donnant une solution de (II.3) $u(s_2) = u_2(\lambda) > \underline{u}(\lambda)$, instable d'après ([67] théorème 7). D'après ([67] proposition 3) $u^*(\epsilon)$ est l'unique solution de (II.3) pour $\lambda = \lambda^*(\epsilon)$.

Il reste à établir l'estimation $L^p(\Omega)$ convenable sur $f(u^*(\epsilon), \epsilon)$. On adapte un procédé non linéaire d'estimation de $f(\underline{u}(\lambda, \epsilon), \epsilon)$ sur la branche minimale pour $\lambda < \lambda^*(\epsilon)$ dû à Crandall et Rabinowitz [38]:

si ϕ et $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions régulières vérifiant :

$\phi(0) = \psi(0) = 0$, $\psi'(t) \geq \phi'^2(t) \, \forall t \in \mathbb{R}$, on a la relation suivante :

$$(III.1) \quad \int_{\Omega} \lambda f(u) \psi(u) \, dx \geq \int_{\Omega} \lambda f_u(u) \phi^2(u) \, dx - \int_{\Omega} c(x) [\phi^2(u) - u \psi(u)] \, dx$$

(on omet l'indice ϵ pour simplifier et \underline{u} est noté ici u). La formule (III.1) se démontre en écrivant que :

$a(u,v) = \lambda(f(u),v)$ avec $v = \psi(u)$
 $a(w,w) \geq \lambda(f(u)w,w)$ avec $w = \phi(u)$ pour $\lambda < \lambda^*$
 et en faisant la différence.

Dans le cas présent on choisit $\phi(u) = (1-\epsilon u) [e^{\frac{pu}{1-\epsilon u}} - 1]$ avec $p > 1$
 et $f_u(u) \phi^2(u) = e^{u/1-\epsilon u} [e^{\frac{pu}{1-\epsilon u}} - 1]^2 = f(u)^{2p+1} - 2 f(u)^{p+1} + f(u)$

$$\phi'(u) = -\epsilon [e^{\frac{pu}{1-\epsilon u}} - 1] + \frac{p}{1-\epsilon u} e^{\frac{pu}{1-\epsilon u}}$$

On vérifie que $\phi'(u)$ est $\geq 0 \quad \forall \epsilon > 0, p > 0, u < 1/\epsilon$, donc

$$\phi'(u)^2 \leq p^2 \frac{e^{\frac{2pu}{1-\epsilon u}}}{(1-\epsilon u)^2} = \frac{p}{2} [e^{\frac{2pu}{1-\epsilon u}} - 1]$$

et on choisit $\psi(u) = \frac{p}{2} [e^{\frac{2pu}{1-\epsilon u}} - 1]$

On vérifie ensuite aisément qu'avec ces choix $u\psi(u) - \phi^2(u) \geq 0$, de sorte que l'estimation (III.1) se simplifie et s'écrit :

$$\frac{p}{2} \int_{\Omega} e^{\frac{u}{1-\epsilon u}} [e^{\frac{2pu}{1-\epsilon u}} - 1] dx \geq \int_{\Omega} [f(u)^{2p+1} - 2 f(u)^{p+1} + f(u)] dx \quad \text{i.e}$$

$$\frac{p}{2} \int_{\Omega} f(u)^{2p+1} dx - \frac{p}{2} \int_{\Omega} f(u) dx \geq \int_{\Omega} [f(u)^{2p+1} - 2f(u)^{p+1} + f(u)] dx$$

$$(1 - \frac{p}{2}) \int_{\Omega} f(u)^{2p+1} dx \leq \int_{\Omega} 2 f(u)^{p+1} dx \leq$$

$$2 \text{ mes } (\Omega)^{\frac{p}{2p+1}} \left[\int_{\Omega} f(u)^{2p+1} dx \right]^{\frac{p+1}{2p+1}} \quad (\text{inégalité de Hölder})$$

ce qui, pour $p < 2$ i.e $q = 2p+1 < 5$ donne une estimation de $f(u)$ dans L^q , uniforme sur la branche $(\lambda, \underline{u}(\lambda))$, $\lambda < \lambda^*$. \square

Remarque 1 : La précision des résultats numériques présentés à la fin de ce travail pour $L = -\Delta$ en géométrie hypersphérique, Ω étant la boule unité de \mathbb{R}^n , ne permet pas d'affirmer avec certitude que $n = 9$ est réellement une dimension critique, comme cela était le cas pour le problème (II.1) (cf [52]).

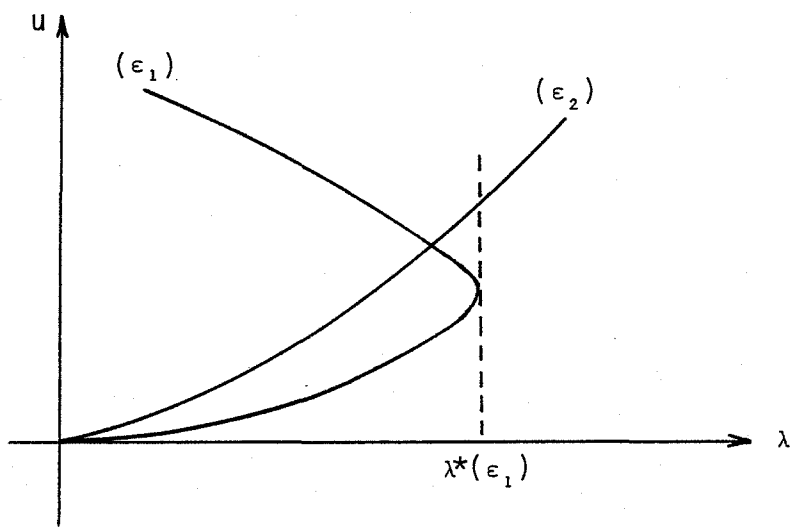
Remarque 2 : La branche minimale est croissante selon ϵ , cela résulte du fait que $\underline{u}(\lambda, \epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} u^n$ où u^n est la solution du problème :

$$\begin{cases} Au^n = \lambda e^{\frac{u^{n-1}}{1-\epsilon u^{n-1}}} & \text{dans } \Omega \\ u^n = 0 & \text{sur } \partial \Omega \end{cases} \quad \text{avec } u^0 = 0$$

et $\epsilon \rightarrow u^n$ est croissante ou encore, pour $\epsilon_1 > \epsilon_2$ $\underline{u}(\lambda, \epsilon_1)$ est une sur-solution de (II.3) $_{\epsilon_2}$ lorsque $\lambda < \min(\lambda^*(\epsilon_1), \lambda^*(\epsilon_2))$ ce qui suffit. On peut en déduire facilement la

Proposition III.2 : On suppose que $\lambda^*(\epsilon), u^*(\epsilon)$ est un point de retournement régulier $\forall \epsilon > 0$ (ie $n \leq 9$ par exemple). Alors l'application $\epsilon \rightarrow \lambda^*(\epsilon)$ est décroissante.

Preuve : Soient $\epsilon_2 > \epsilon_1$ et supposons $\lambda^*(\epsilon_2) > \lambda^*(\epsilon_1)$



Pour $\lambda = \lambda^*(\varepsilon_1)$, $\underline{u}(\lambda, \varepsilon_2) \geq \underline{u}(\lambda, \varepsilon_1) = u^*(\varepsilon_1)$; $\lambda < \mu(\lambda, \varepsilon_2)$

$$= \inf_{w \in V} \{a(w, w) / (f_t(\underline{u}(\lambda, \varepsilon_2), \varepsilon_2)w, w)\}$$

$$\leq \inf_V \{a(w, w) / (f_t(\underline{u}(\lambda, \varepsilon_1), \varepsilon_2)w, w)\}$$

$$\leq \inf_V \{a(w, w) / f_t(\underline{u}(\lambda, \varepsilon_1), \varepsilon_1)w, w)\}$$

$= \mu(\lambda, \varepsilon_1) = \lambda^*(\varepsilon_1) = \lambda$ ce qui est absurde, donc $\lambda^*(\varepsilon_2) \leq \lambda^*(\varepsilon_1)$. \square

Proposition III.3 : Dans tous les cas, $\lim_{\varepsilon \uparrow \infty} \lambda^*(\varepsilon) = 0$

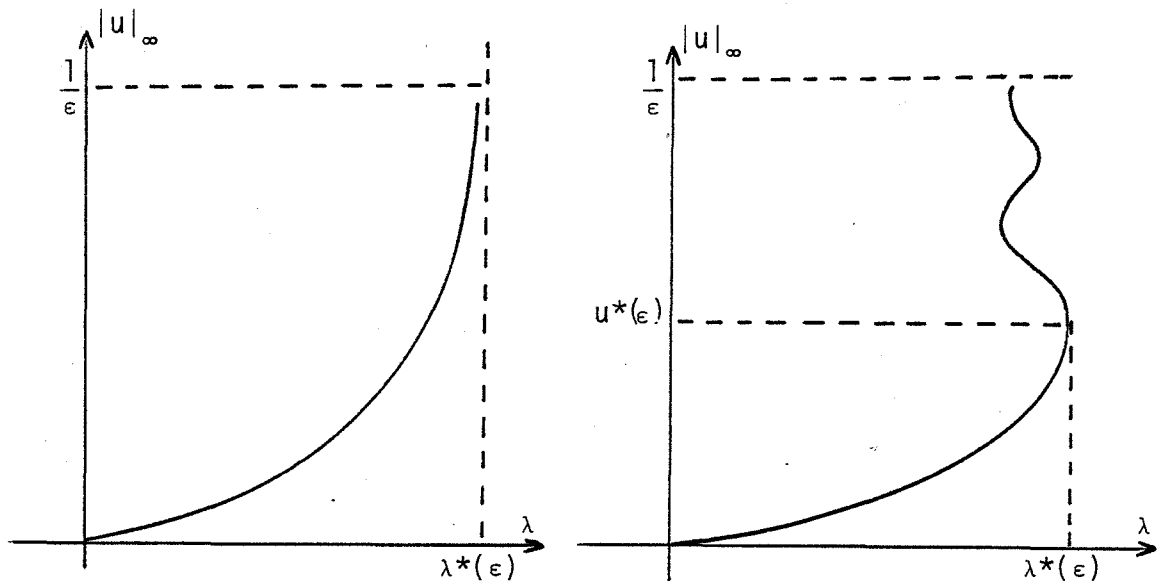
Preuve : Soit $\lambda(\varepsilon) = \frac{\lambda^*(\varepsilon)}{2}$; puisque $\underline{u}(\lambda(\varepsilon), \varepsilon) \geq \lambda(\varepsilon)$,
 $\underline{u}(\lambda(\varepsilon), \varepsilon) \geq \lambda(\varepsilon) \phi_1$ où $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$, $A \phi_1 = 1$; comme $|\underline{u}(\lambda(\varepsilon), \varepsilon)|_\infty < 1/\varepsilon$
 le résultat est évident. \square

III.2 Prolongement maximal de la branche

Dans le cas où $n \leq 9$ par exemple, $\lambda^*(\varepsilon)$, $u^*(\varepsilon)$ est une solution régulière de (II.3) vérifiant $|u^*(\varepsilon)|_\infty < 1/\varepsilon$ et la proposition III.1 (voir aussi [67] théorème 7) montre que l'arc $(\lambda, \underline{u}(\lambda, \varepsilon))$ peut-être prolongé au delà du point $(\lambda^*(\varepsilon), u^*(\varepsilon))$. La question qui se pose est de savoir jusqu'où on peut faire ce prolongement. En fait, en adaptant un argument de Rabinowitz [72] on va montrer que ce prolongement est possible tant que $|u(\lambda, \varepsilon)|_\infty < 1/\varepsilon$ où $(\lambda, u(\lambda, \varepsilon))$ est un arc de solutions du problème (II.3), au sens défini dans la

Proposition III.4 : Soit $S \subset \mathbb{R}_+ \times C(\bar{\Omega})$ l'adhérence de l'ensemble des solutions (λ, u) , $\lambda \geq 0$, $0 \leq u < 1/\varepsilon$ de (II.3). Alors S possède une composante connexe maximale C contenant la branche de solutions minimales $\mathcal{A} = \{\lambda, \underline{u}(\lambda, \varepsilon) / \lambda < \lambda^*(\varepsilon)\}$ et, le long de C , $\max_{x \in \Omega} u(\lambda, \varepsilon, x)$ tend vers $1/\varepsilon$.

Il se peut que $C = \mathcal{A}$ ou que C prolonge strictement \mathcal{A} (lorsque $|u^*(\varepsilon)|_\infty < 1/\varepsilon$) comme indiqué sur les figures ci-après.



Démonstration : Soit \mathcal{O}_n l'ouvert de $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ suivant :
 $\mathcal{O}_n = \{(\lambda, u) / 0 \leq \lambda < \lambda^*(\epsilon) + 1 ; |u|_\infty < 1/\epsilon - 1/n \text{ pour } n \geq n_\epsilon, n_\epsilon \text{ étant un entier vérifiant } 1/\epsilon - 1/n_\epsilon > 0. \text{ Admettons pour un instant le résultat suivant :}$

Lemme : Soit S_n l'adhérence dans \mathcal{O}_n de l'ensemble des solutions $(\lambda, u) \in \mathcal{O}_n$ de (II.3). Alors S_n contient une composante connexe maximale C_n contenant $(0,0)$ et rencontrant la frontière de \mathcal{O}_n en un point $\neq (0,0)$.

Dans ce cas, on sait que si $(\lambda, u) \in C_n$, alors $\lambda \leq \lambda^*(\epsilon)$. D'autre part,

$$\frac{d}{dt} [e^{\frac{t}{1-\epsilon t}}] \leq e^{\frac{n-\epsilon}{\epsilon^2}} \cdot \frac{n^2}{\epsilon^2} \text{ pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{n} ; \text{ donc pour}$$

$0 \leq \lambda \leq \frac{\lambda_1 \epsilon^2}{n^2} e^{\frac{\epsilon-n}{\epsilon^2}}$, on a une solution unique à (II.3) qui est forcément $\underline{u}(\lambda, \epsilon)$. Le point où C_n rencontre $\partial \mathcal{O}_n$, autre que $(0,0)$ vérifie donc nécessairement $|u|_\infty = 1/\epsilon - 1/n$, et, par la maximalité de C_n , C_n contient $\{(\lambda, \underline{u}(\lambda, \epsilon)) / \lambda < \lambda^*(\epsilon)\} \cap \mathcal{O}_n$. Il est clair alors que $C = \bigcup_{n \geq n_\epsilon} C_n$ répond à la question. \square

Démonstration du lemme :

On met l'équation sous la forme équivalente suivante :

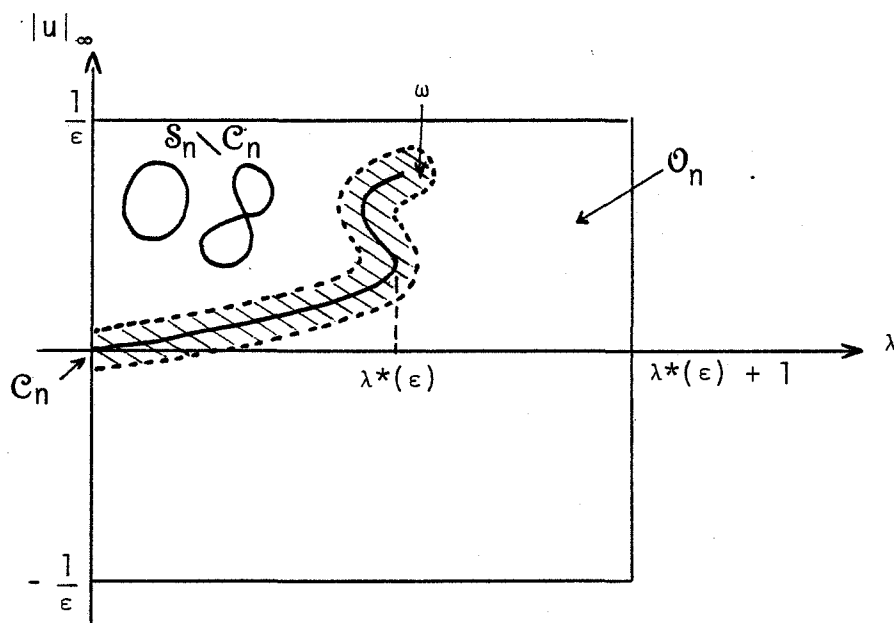
$$(III.3) \quad \begin{cases} u = \lambda \mathcal{G} F(u, \varepsilon) = T(\lambda, u) \\ (\lambda, u) \in \mathcal{O}_n \end{cases}$$

où \mathcal{G} est l'opérateur de Green associé à A et F l'opérateur de Nemytskii associé à $f(u, \varepsilon)$:

$$F(u, \varepsilon)(x) = f(u(x), \varepsilon)$$

Par les estimations classiques de Schauder (A et Ω sont réguliers) T est continu et compact sur $\overline{\mathcal{O}}_n$, $\forall n < \infty$, $T(0, u) \equiv 0$, $T(\lambda, 0) \neq 0$ pour $\lambda \neq 0$.

Supposons que C_n ne rencontre $\partial \mathcal{O}_n$ qu'au point $(0, 0)$



Comme dans le lemme 1.2 de [72] on obtient l'existence d'un ouvert $\omega \subset \mathcal{O}_n$, contenant C_n , tel que $S_n \cap \partial \omega = \emptyset$ ie $S_n \setminus C_n$ est à l'extérieur de ω , ω étant borné. Puisque aucune solution de (III.3) ne se trouve sur $\partial \omega$, on peut considérer le degré topologique [61] de $u - T(\lambda, u)$ au point 0 dans $\omega_\lambda = \{u / (\lambda, u) \in \omega\}$:

$\deg(u - T(\lambda, u), \omega_\lambda, 0)$ est constant par homotopie, donc égal à 1 (pour $\lambda = 0$), ce qui est absurde. \square

IV ETUDE DE (II.3) EN GEOMETRIE HYPERSPHERIQUE

Nous illustrons et précisons les résultats présentés ci-dessus pour le problème (II.3) particulier correspondant à $A = -\Delta$, Ω = boule unité de \mathbb{R}^n . On considère les solutions à symétrie radiale c'est-à-dire celles vérifiant :

$$(IV.1) \quad \begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r} u' + \lambda e^{\frac{u}{1-\varepsilon u}} = 0 & 0 < r < 1 \\ u'(0) = 0 & u(1) = 0 \end{cases}$$

Les résultats sont essentiellement numériques, sauf pour $n = 1$ où l'on a quelques précisions supplémentaires. Le but ici est de mettre en évidence les analogies et les différences avec le problème (II.1) du point de vue de la multiplicité et d'examiner ce qui se passe lorsque $|u(\lambda, \cdot)|_\infty$ tend vers $1/\varepsilon$.

IV.1 Résultats analytiques élémentaires en dimension 1

On s'intéresse au problème suivant :

$$(IV.2) \quad u'' + \lambda e^{\frac{u}{1-\varepsilon u}} = 0 \quad u'(0) = u(1) = 0$$

on pose $m = u(0)$ et $\phi(z) = \int_0^z e^{t/(1-\varepsilon t)} dt$.

Si on multiplie l'équation (IV.2) par $u'(r)$ et qu'on l'intègre de 0 à r on obtient :

$$u'^2(r) + 2\lambda \int_{u(0)}^{u(r)} e^{\frac{t}{1-\varepsilon t}} dt = 0$$

Comme u'' est < 0 , $u'(r)$ est ≤ 0 donc

$$\frac{u'(r)}{\sqrt{\phi(m) - \phi(u(r))}} = -\sqrt{2\lambda}$$

et u est donnée par la relation implicite suivante :

$$\int_{u(r)}^m \frac{dz}{\sqrt{\phi(m) - \phi(z)}} = \sqrt{2\lambda} \quad r \quad \text{sous réserve}$$

toutefois que l'on puisse trouver m vérifiant :

$$\int_0^m \frac{dz}{\sqrt{\phi(m) - \phi(z)}} = \sqrt{2\lambda} \quad (\text{pour avoir } u(1) = 0)$$

La fonction $\psi(m) = \int_0^m \frac{dz}{\sqrt{\phi(m) - \phi(z)}}$ est définie pour tout $m < 1/\epsilon$

puisque, au voisinage de $z = m < 1/\epsilon$

$$\phi(m) - \phi(z) \sim (m-z) e^{m/1-\epsilon m} \rightarrow (\phi(m) - \phi(z))^{-\frac{1}{2}} \in L^1(0, m)$$

Donc pour tout $m = u(0) < 1/\epsilon$ il existe une solution unique $u(r)$ associée à $\lambda = \psi(m)^2/2$, ce qui prouve dans ce cas l'existence d'une branche (λ, u) partant de $(0, 0)$ et le long de laquelle $|u|_\infty$ tend vers $1/\epsilon$.

Lorsque $m \uparrow 1/\epsilon$, $\psi(m)$ tend vers 0.

En effet si on pose $\frac{z}{1-\epsilon z} = v$ $\frac{m}{1-\epsilon m} = n \uparrow \infty$:

$$\psi(m) = \theta(n) = \int_0^n \frac{dv}{(1+\epsilon v)^2 \sqrt{\int_z^m e^{t/1-\epsilon t} dt}} = \int_0^n \frac{dv}{(1+\epsilon v)^2 \sqrt{\int_v^n \frac{e^u}{(1+\epsilon u)^2} du}}$$

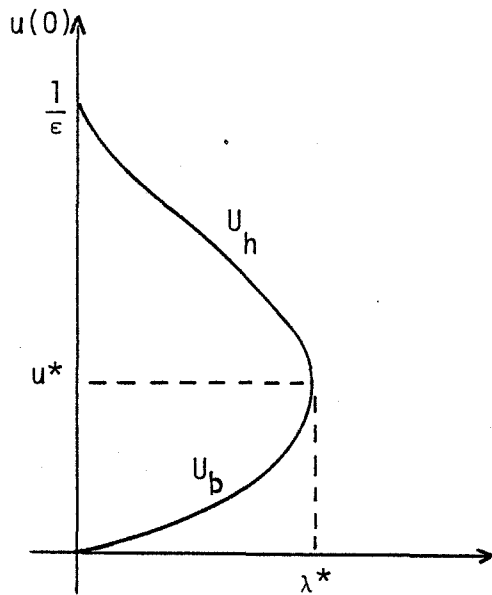
$$\theta(n) \leq \int_0^n \frac{dv}{\sqrt{\int_v^n \frac{e^u}{(1+\epsilon n)^2} du}} \leq (1+\epsilon n) \int_0^n \frac{dv}{\sqrt{e^n - e^v}}$$

$$= e^{-\frac{n}{2}} (1+\epsilon n) \int_0^n \frac{dv}{\sqrt{1-e^{-v}}} \sim n(1+\epsilon n) e^{-\frac{n}{2}} \rightarrow 0$$

(poser $v = nu$ et appliquer le théorème de Lebesgue : $1 - e^{-nu} \geq 1 - e^{-u}$)
donc lorsque $u(0) = |u|_\infty$ tend vers $1/\epsilon$, λ tend vers 0 ;

$\psi(m)$ atteint ainsi un maximum sur $[0, \frac{1}{\epsilon}[$, $\psi(m^*)$ et $\lambda^* = \frac{\psi(m^*)^2}{2}$

Les calculs numériques montrent que la fonction $\lambda(m) = \psi(m)^2/2$ est unimodale. Pour tout $\lambda < \lambda^*$ on a deux solutions $u_b(\lambda, x) < u_h(\lambda, x)$ avec $u_b(\lambda, x) \rightarrow 0$ dans $C^2(0,1)$ lorsque $\lambda \rightarrow 0$ et $u_h(\lambda, 0) \rightarrow 1/\epsilon$ lorsque $\lambda \rightarrow 0$.



On peut voir qu'en fait on a un point d'arrêt [13] sur la branche haute en ce sens que $u_h(\lambda, x)$ tend vers une fonction qui est seulement $C^0(0,1)$:

Proposition IV.1 : Lorsque $\lambda \rightarrow 0$, $\frac{u_b(x)}{u_b(0)} \rightarrow 1 - x^2$
et $\frac{u_h(x)}{u_h(0)} \rightarrow 1 - |x|$ dans $L^2(0,1)$ et pp. (i.e. $u_h(x) \rightarrow u_c(x) = \frac{1}{\epsilon} (1 - |x|)$
et $(0, u_c)$ est un point d'arrêt).

Preuve : Pour $\lambda < \lambda^*$, $u_\lambda = u_b(\lambda, \cdot)$ désigne la solution basse :

Soit $y \in]0,1[$; il existe x_λ tel que

$$\frac{u_\lambda(x_\lambda)}{m_\lambda} = y \quad \text{où} \quad m_\lambda = u_b(\lambda, 0)$$

c'est-à-dire que y et x_λ sont liés par la relation :

$$\int_{m_\lambda \cdot y}^{m_\lambda} \frac{dz}{\sqrt{\Phi(m_\lambda) - \Phi(z)}} = \sqrt{2\lambda} \quad x_\lambda \quad \text{avec}$$

$$\sqrt{2\lambda} = \int_0^{m_\lambda} \frac{dz}{\sqrt{\Phi(m_\lambda) - \Phi(z)}} \quad (\text{on fait tendre } m_\lambda = m \text{ vers } 0 \text{ pour la branche basse})$$

$$\sqrt{2\lambda} \quad x_\lambda \quad \frac{\sqrt{\Phi(m)}}{m} = \int_y^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - \frac{\Phi(zm)}{\Phi(m)}}} \quad \text{avec}$$

$$\sqrt{2\lambda} \quad \frac{\sqrt{\Phi(m)}}{m} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - \frac{\Phi(zm)}{\Phi(m)}}}$$

$$\frac{\Phi(zm)}{\Phi(m)} = \frac{\int_0^{zm} \frac{t}{e^{1-\epsilon t}} dt}{\int_0^m \frac{t}{e^{1-\epsilon t}} dt} = z \frac{\int_0^m \frac{tz}{e^{1-\epsilon tz}} dt}{\int_0^m \frac{t}{e^{1-\epsilon t}} dt}$$

$$\text{donc } \frac{\Phi(zm)}{\Phi(m)} \leq z \quad \text{et} \quad \left[1 - \frac{\Phi(zm)}{\Phi(m)}\right]^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-z}} \in L^1(0,1)$$

et de plus $\lim_{m \rightarrow 0} \frac{\Phi(zm)}{\Phi(m)} = 1$ donc on peut appliquer le théorème de

Lebesgue et

$$x_\lambda \rightarrow \frac{\int_y^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z}}}{\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z}}} = \sqrt{1-y}$$

Soit $v_\lambda = \frac{u_\lambda(\cdot)}{m_\lambda}$; moyennant une extraction, $v_\lambda \rightarrow v$ dans $L^2(0,1)$ et pp; on montre alors facilement que $v(x) = y$ (pp en x) donc

$$v(x) = 1 - x^2$$

Pour la solution haute, en posant $v_\lambda(x) = \frac{u_h(\lambda, x)}{u_h(\lambda, 0)}$ on obtient de même, avec $v_\lambda(x_\lambda) = y$:

$$\sqrt{2\lambda} \quad x_\lambda \quad \frac{\sqrt{\phi(m)}}{m} = \int_y^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - \frac{\phi(zm)}{\phi(m)}}} \quad , \quad \lambda \text{ étant défini par :}$$

$$\sqrt{2\lambda} \quad \frac{\sqrt{\phi(m)}}{m} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - \frac{\phi(zm)}{\phi(m)}}} \quad \text{avec } m \rightarrow \frac{1}{\epsilon}$$

et

$$\frac{\phi(zm)}{\phi(m)} = \frac{\int_0^{zm} \frac{t}{e^{T-\epsilon t}} dt}{\int_0^m \frac{t}{e^{T-\epsilon t}} dt} = \frac{\int_0^{\frac{zm}{T-\epsilon zm}} \frac{e^u}{(1+\epsilon u)^2} du}{\int_0^{\frac{m}{T-\epsilon m}} \frac{e^u}{(1+\epsilon u)^2} du}$$

$$\leq \frac{\frac{zm}{e^{T-\epsilon zm}} - 1}{\frac{m}{e^{T-\epsilon m}} - 1} (1+\epsilon n)^2 \quad \text{qui tend vers 0}$$

pour $z \in [0,1[$, donc $\left[1 - \frac{\phi(zm)}{\phi(m)}\right]^{\frac{1}{2}} \rightarrow 1$ pp et est majorée par $(1-z)^{-\frac{1}{2}}$. D'après le théorème de Lebesgue, $x_\lambda \rightarrow 1-y$ (et $\lambda \sim \frac{m^2}{2\phi(m)}$ lorsque $m \rightarrow \frac{1}{\varepsilon}$) donc, comme avant, $v_\lambda \rightarrow v$ pp et dans $L^2(0,1)$ (l'unicité de la limite implique la convergence de toute la suite) et $v(x) = y$ ie $v(x) = 1-x$ ($x > 0$) \square

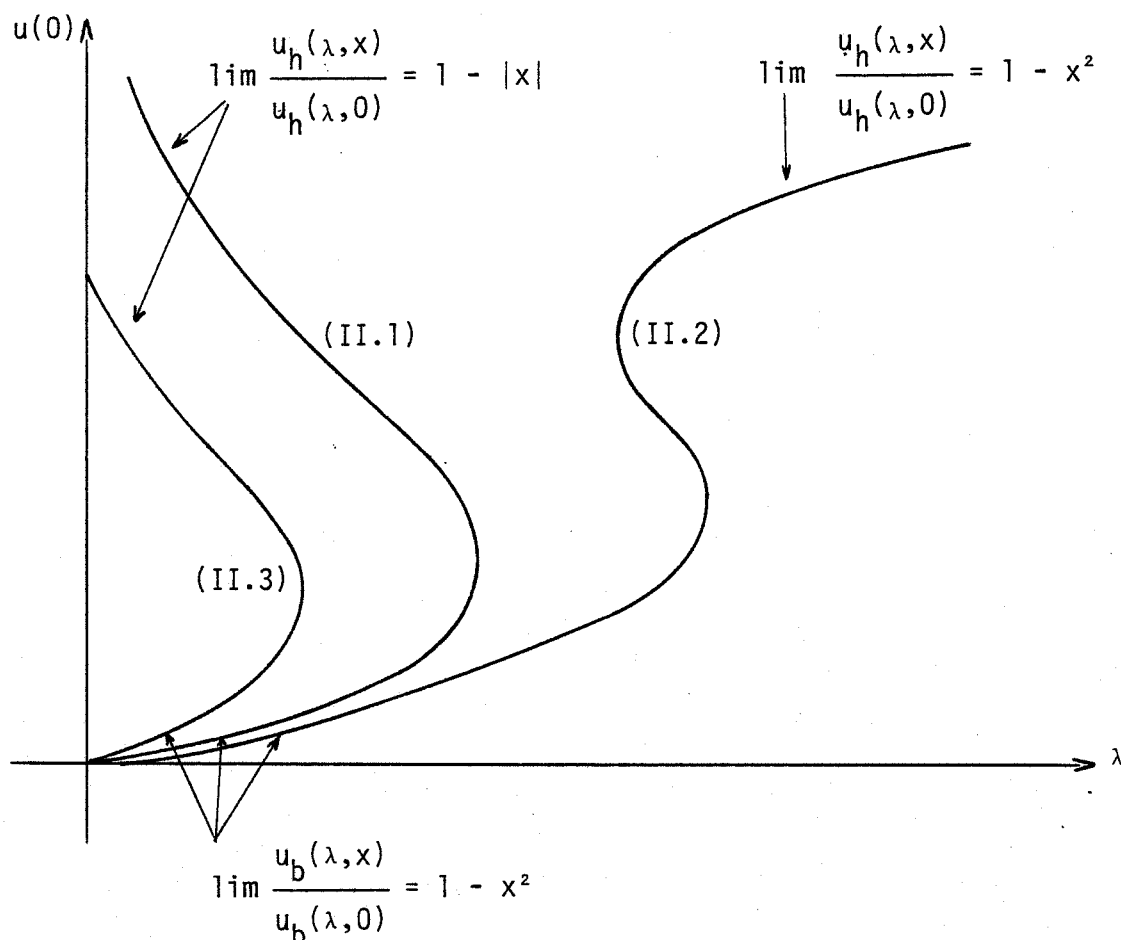
Remarques :

1] Rappelons que pour le problème (II.1) on avait les mêmes résultats :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{u_b(x)}{u_b(0)} = 1 - x^2, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{u_h(x)}{u_h(0)} = 1 - |x|$$

mais que, pour le problème (II.2), si $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{u(\lambda, x)}{u(\lambda, 0)} = 1 - x^2$, en

revanche $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{u(\lambda, x)}{u(\lambda, 0)} = 1 - x^2$ aussi, on n'avait pas de perte de régularité dans ce cas.



- 2] Si on ne s'intéresse pas aux estimations liant λ et m , on peut appliquer directement la proposition (II.1) à

$$\frac{\phi(zm)}{\phi(m)} \quad \text{lorsque } m \rightarrow 0 \quad \text{ou } m \rightarrow \frac{1}{\varepsilon}$$

mais ici il faut quand même faire un calcul pour trouver la limite de

$$\frac{\phi(zm)}{\phi(m)} \quad \text{lorsque } m \rightarrow \frac{1}{\varepsilon}; \text{ on obtient les résultats de convergence dans } C^0(0,1).$$

IV.2 Etude numérique en dimension n

On considère le problème aux limites :

$$(IV.3) \quad \begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r} u' + \lambda e^{\frac{u}{1-\varepsilon u}} = 0 & (\varepsilon > 0) \\ u'(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

L'étude du diagramme de bifurcation $(\lambda, u(\lambda, 0))$ peut se faire de la manière suivante :

On considère le problème de Cauchy:

$$(IV.4) \quad \begin{cases} w'' + \frac{n-1}{r} w' + e^{\frac{w}{1-\varepsilon w}} = 0 & r > 0 \\ w(0) = \alpha & w'(0) = 0 \end{cases}$$

qui admet, pour tout $\alpha \in [0, 1/\varepsilon[$ une solution unique w_α décroissante strictement (*). Soit r_0 l'unique point de \mathbb{R}_+ tel que $w_\alpha(r_0) = 0$ et soit $u(r) = w_\alpha(r/r_0)$ pour $r \in (0, 1)$. Alors u vérifie l'équation

$$(IV.5) \quad \begin{cases} u''(r) + \frac{n-1}{r} u'(r) + r_0^2 e^{\frac{u}{1-\varepsilon u}} = 0 \\ u'(0) = w'(0) = 0 \quad ; \quad u(1) = w_\alpha(r_0) = 0 \end{cases}$$

donc u est une solution de (IV.3) pour $\lambda = r_0^2$ et dans ce cas $u(0) = \alpha$.

(*) (IV.4) implique que $\frac{d}{dr} [r^{n-1} \frac{dw}{dr}] < 0$ pour $r > 0$ donc $r^{n-1} \frac{dw}{dr} \uparrow$ et en particulier $\frac{dw}{dr} \leq 0$. Pour $n = 1$, on est assuré que w est concave.

Réciproquement, si u est une solution de (IV.3) alors

$$w(\rho) = u\left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad 0 < \rho < \sqrt{\lambda} \quad \text{vérifie :}$$

$$(IV.6) \quad \begin{cases} w''(\rho) + \frac{n-1}{\rho} w'(\rho) + e^{\frac{w}{1-\epsilon w}} = 0 \\ w(0) = u(0) \\ w'(0) = 0 \end{cases}$$

Autrement dit, on obtient toutes les solutions de (IV.3) à partir du problème (IV.4) en faisant varier α dans $[0, 1/\epsilon[$.

Le diagramme de bifurcation est l'ensemble $(\lambda, u(\lambda, 0))$ paramétré par $\alpha \in [0, 1/\epsilon]$, c'est-à-dire $(r_0^2(\alpha), \alpha)$ où, pour α donné, r_0 s'obtient par la résolution de (IV.4).

Le raisonnement ci-dessus est en fait valable également pour le problème (II.1) ($\epsilon = 0$, $\alpha \in [0, \infty[$) et pour le problème (II.2) avec $e^{\frac{u}{1+\epsilon u}}$ ($\epsilon > 0$, $\alpha \in [0, \infty[$) et c'est ce qui a été utilisé numériquement pour tracer les diagrammes figurant en annexe, où l'étude est faite, pour (II.1.2.3) en fonction de la dimension n .

IV.3 Conjectures et conclusion

Au vu de ce qui a été dit en IV.1 et des résultats numériques figurant ci-après, on peut faire l'analyse suivante (c'est, essentiellement un recueil de conjectures sauf pour $n = 1$) :

- 1] Pour $0 < n < n_1(\epsilon)$ on a un seul point de retournement et $\lambda \rightarrow 0$ lorsque $|u|_\infty \rightarrow 1/\epsilon$ (figures 1, 2 et 3 de l'annexe)
- 2] Pour $n_1(\epsilon) < n < n_2(\epsilon)$ on a plusieurs (une infinité de ?) retournements et lorsque $|u|_\infty \rightarrow 1/\epsilon$ λ semble converger vers une valeur λ_c (figures 1 à 5, et 7)
- 3] Pour $n > n_2(\epsilon)$, on a, semble-t-il unicité sur $[0, \lambda^*(\epsilon)[= [0, \lambda_c[$

- 4] La dépendance de n_1 , n_2 selon ϵ n'est pas très claire à nos yeux.
En revanche (cf fig 8) la dépendance de λ_c selon n est, numériquement parfaitement linéaire (au moins pour $n \geq 4$ par exemple)

$$\lambda_c(\epsilon, n) = a(\epsilon) n - b(\epsilon) \quad \text{avec } a(\epsilon) > 0, b(\epsilon) > 0$$

- 5] (examen de la figure 9) Pour $n = 1$ on vérifie que la solution normalisée varie de $1 - x^2$ à $1 - x$ lorsque u_{\max} varie de 0 à $1/\epsilon$ ($\epsilon = 0.2$).
Pour $n > 1$ on devrait converger vers une solution convexe au plus aussi régulière que $1 - |x|$ (éventuellement la fonction nulle pour $x > 0$).

Remarque : Estimation du coefficient $a(\epsilon)$

Il est démontré dans [52] le résultat suivant :
si on considère les deux problèmes :

$$\begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r} u' + \lambda f(u) = 0 ; u(0) = \alpha ; u'(0) = u(1) = 0 \\ v' + \mu r f(v) = 0 ; v(0) = \alpha ; v(1) = 0 \end{cases}$$

et si f est ≥ 0 , lipschitzienne, alors pour n assez grand :

$$\begin{aligned} \|u(\alpha, \cdot) - v(\alpha, \cdot)\|_{\infty} &\leq \frac{K_1(\alpha)}{n} \\ \left| \mu(\alpha) - \frac{\lambda}{n} \right| &\leq \frac{K_2(\alpha)}{n} \end{aligned}$$

Nous appliquons ce résultat à $f(u) = e^{\frac{u}{1-\epsilon u}}$ (non lipschitzienne !) en faisant tendre α vers $1/\epsilon$:

$$\text{si } \mu(\alpha) \rightarrow \mu_c \quad \text{alors } \lambda_c(n) \sim \mu_c n \quad \text{donc } a(\epsilon) = \mu_c$$

Or la limite μ_c existe et se calcule très facilement .

L'équation en v s'écrit :

$$\frac{v'}{e^{\frac{v}{1-\epsilon v}}} = -\mu r \rightarrow \int_{\alpha}^{v(r)} e^{-\frac{t}{1-\epsilon t}} dt = -\frac{\mu r^2}{2}$$

Donc $v(\alpha, .)$ est donné par la relation implicite :

$$\int_{\alpha}^{v(r)} e^{-\frac{t}{1-\epsilon t}} dt = -\frac{\mu r^2}{2}$$

avec $\int_0^{\alpha} e^{-\frac{t}{1-\epsilon t}} dt = \frac{\mu}{2}$ (pour avoir $v(1) = 0$)

Lorsque $\alpha \rightarrow \frac{1}{\epsilon}$, $\mu \rightarrow \mu_c = 2 \int_0^{1/\epsilon} e^{-\frac{t}{1-\epsilon t}} dt$

soit $\mu_c = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{(1+\epsilon z)^2} dz$. Le calcul numérique de cette intégrale

donne une valeur $\mu_c(\epsilon)$ en bon accord avec les estimations $a(\epsilon)$ déduites de la figure 8 :

ϵ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2	5
$\mu_c(\epsilon)$	2.00	1.48	1.21	1.03	0.90	0.81	0.53	0.26
$a(\epsilon)$	2.00	1.46	1.19	1.02	0.90	0.81	0.53	0.29

ANNEXE

RESULTATS NUMERIQUES CONCERNANT LE PROBLEME

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' + \frac{n-1}{r} u' + \lambda \exp\left(\frac{u}{1-\varepsilon u}\right) = 0 \\ u'(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{array} \right.$$

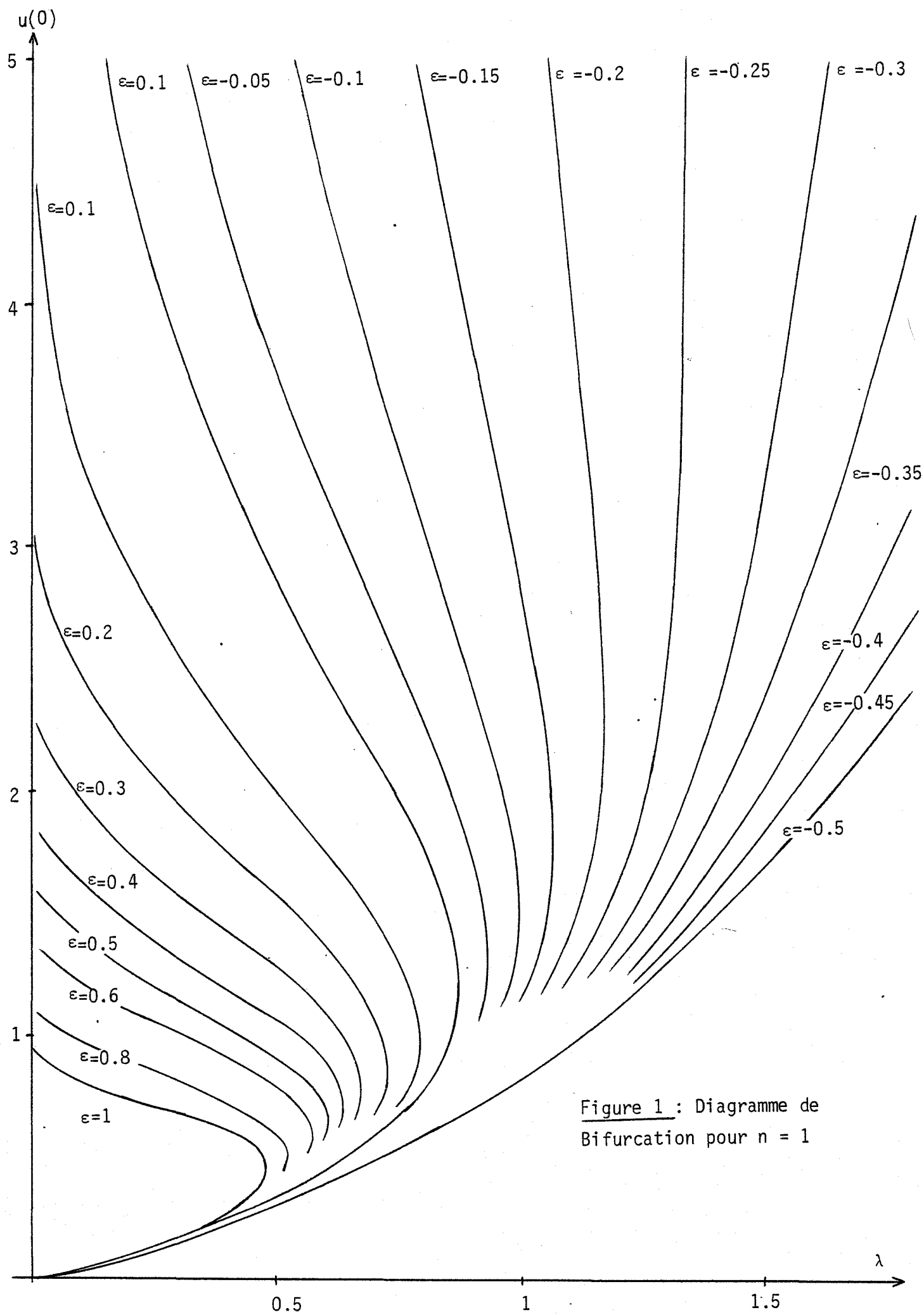


Figure 1 : Diagramme de Bifurcation pour $n = 1$

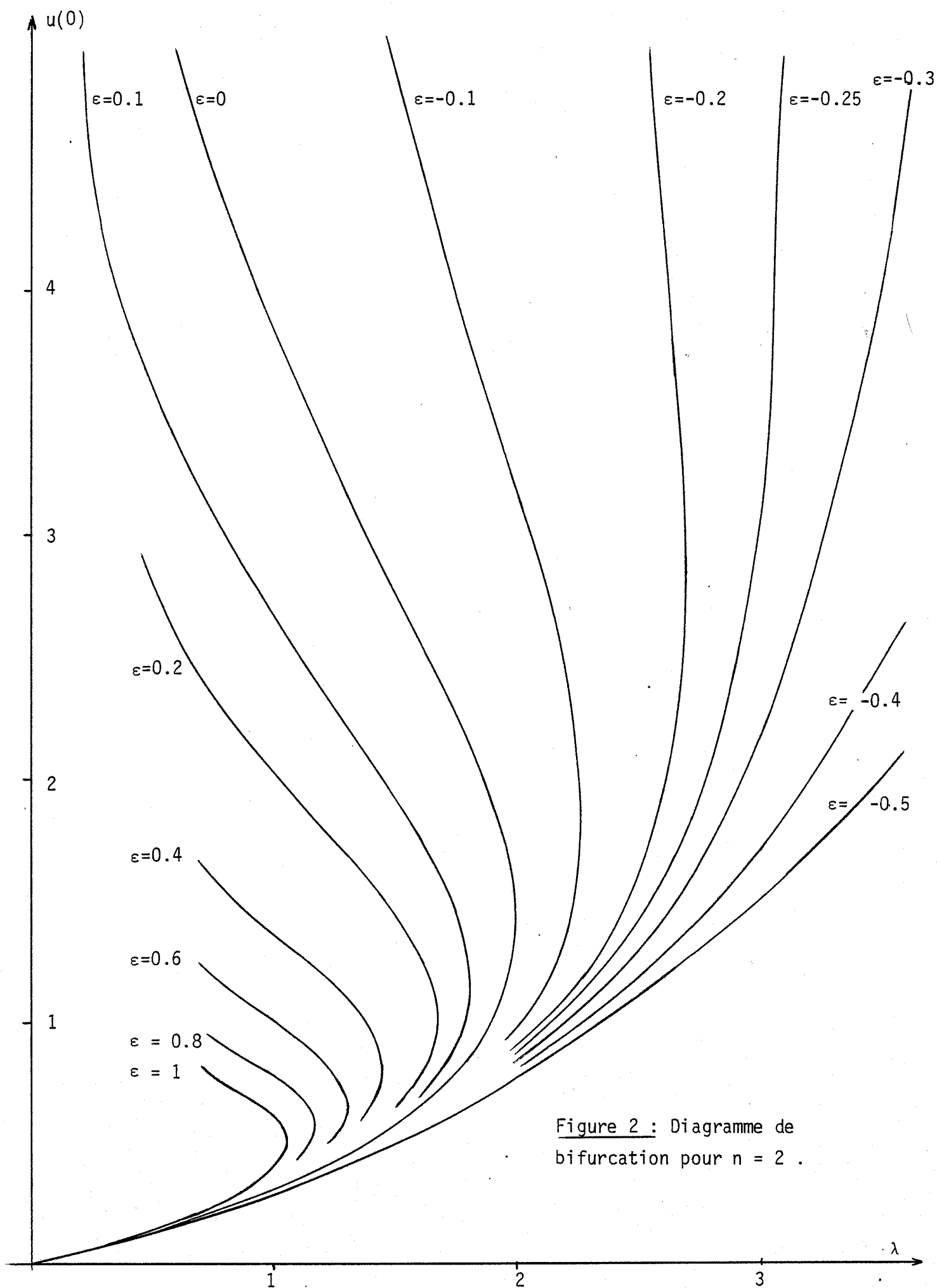


Figure 2 : Diagramme de bifurcation pour $n = 2$.

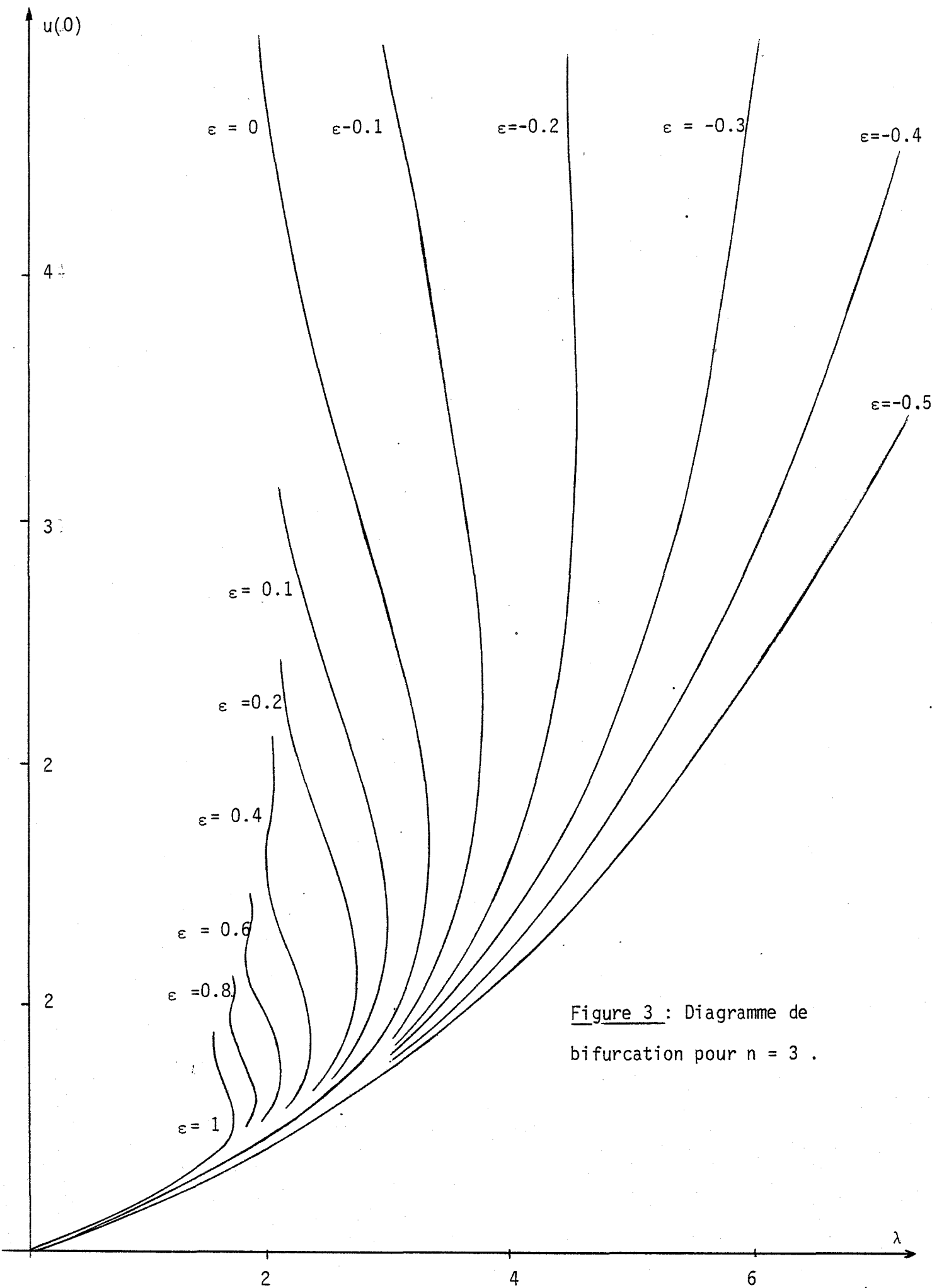
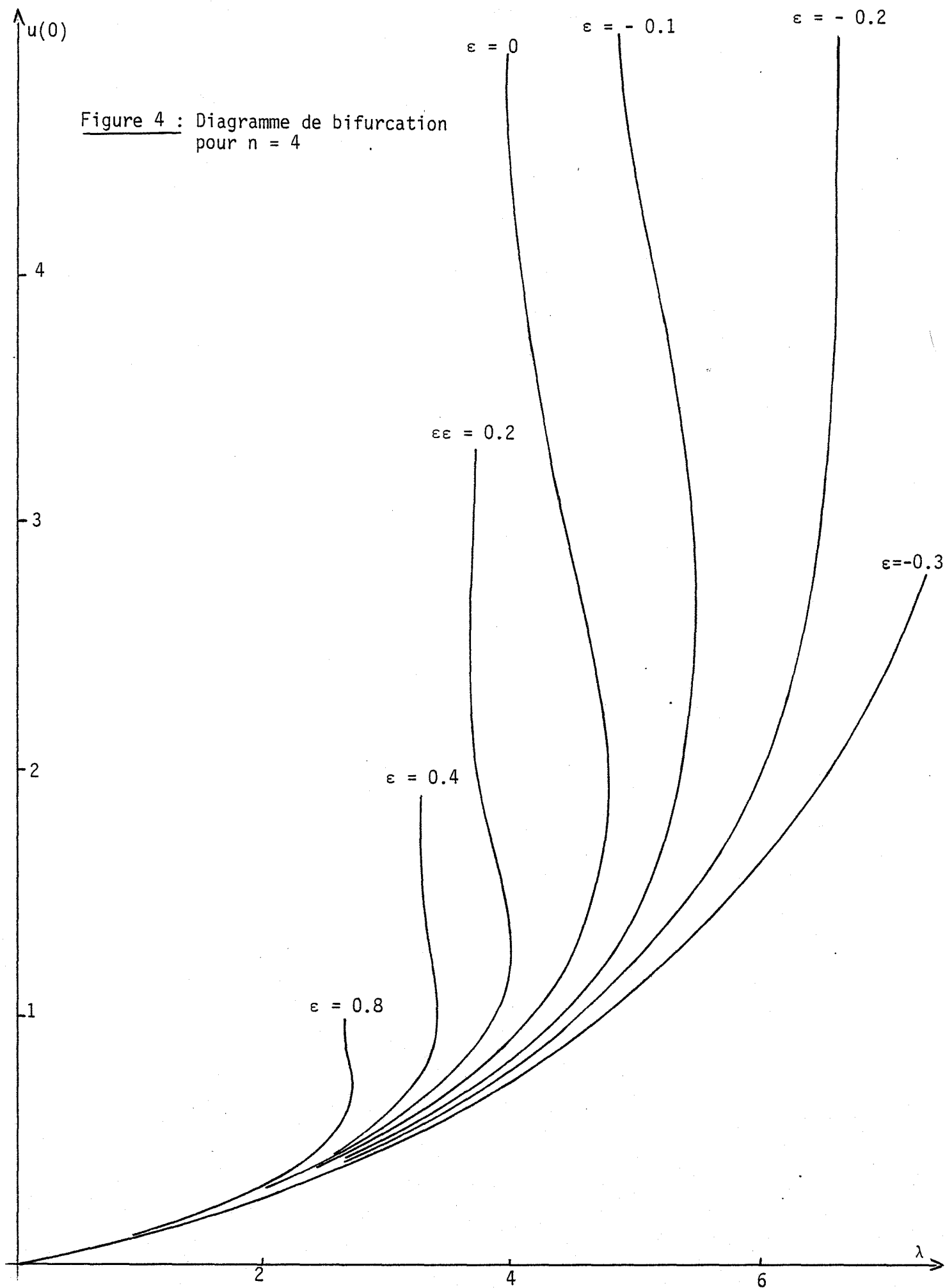


Figure 3 : Diagramme de
bifurcation pour $n = 3$.



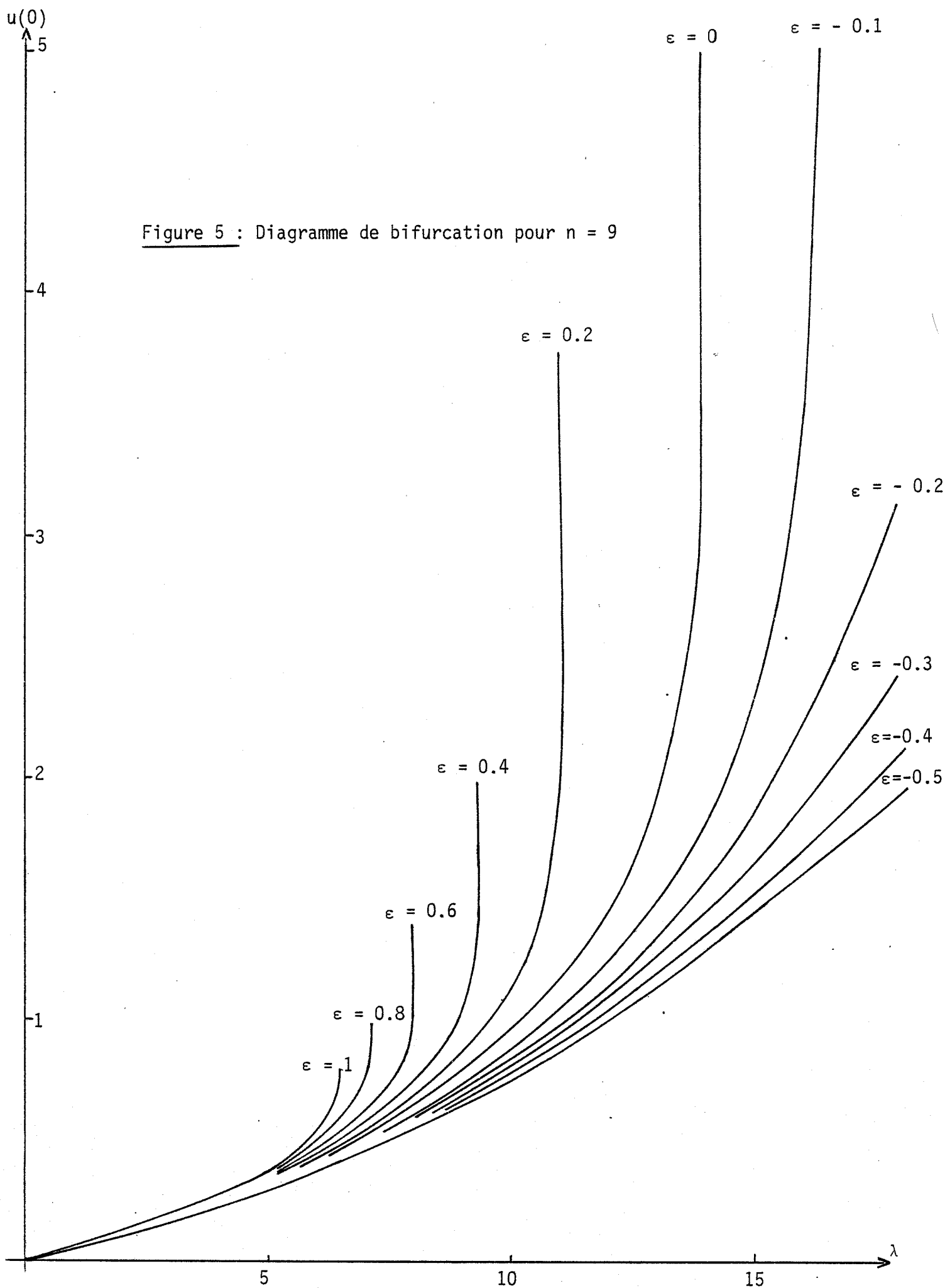
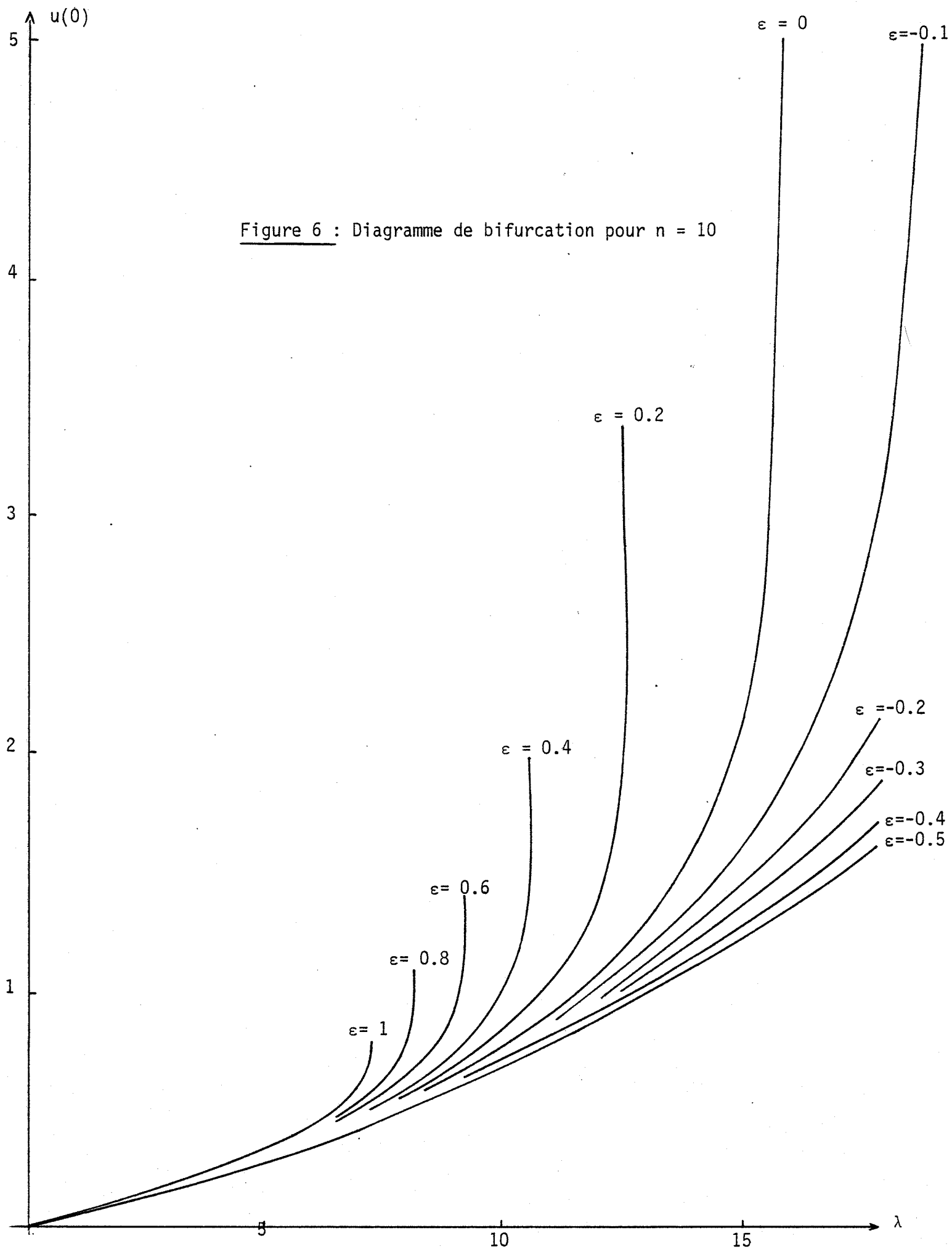


Figure 6 : Diagramme de bifurcation pour $n = 10$



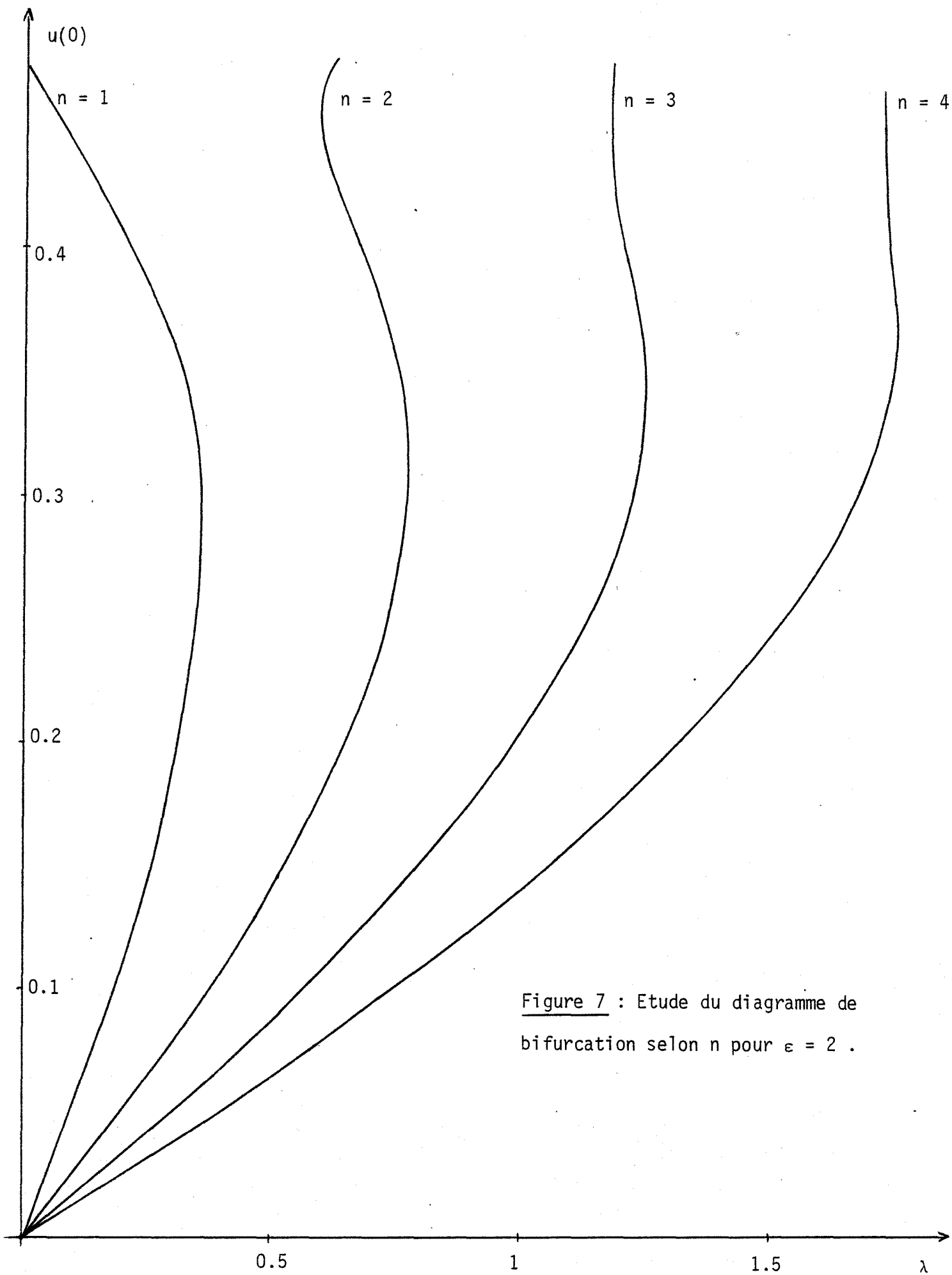


Figure 7 : Etude du diagramme de bifurcation selon n pour $\epsilon = 2$.

Figure 8 : Etude de λ_c en fonction
de n lorsque ϵ est fixé .

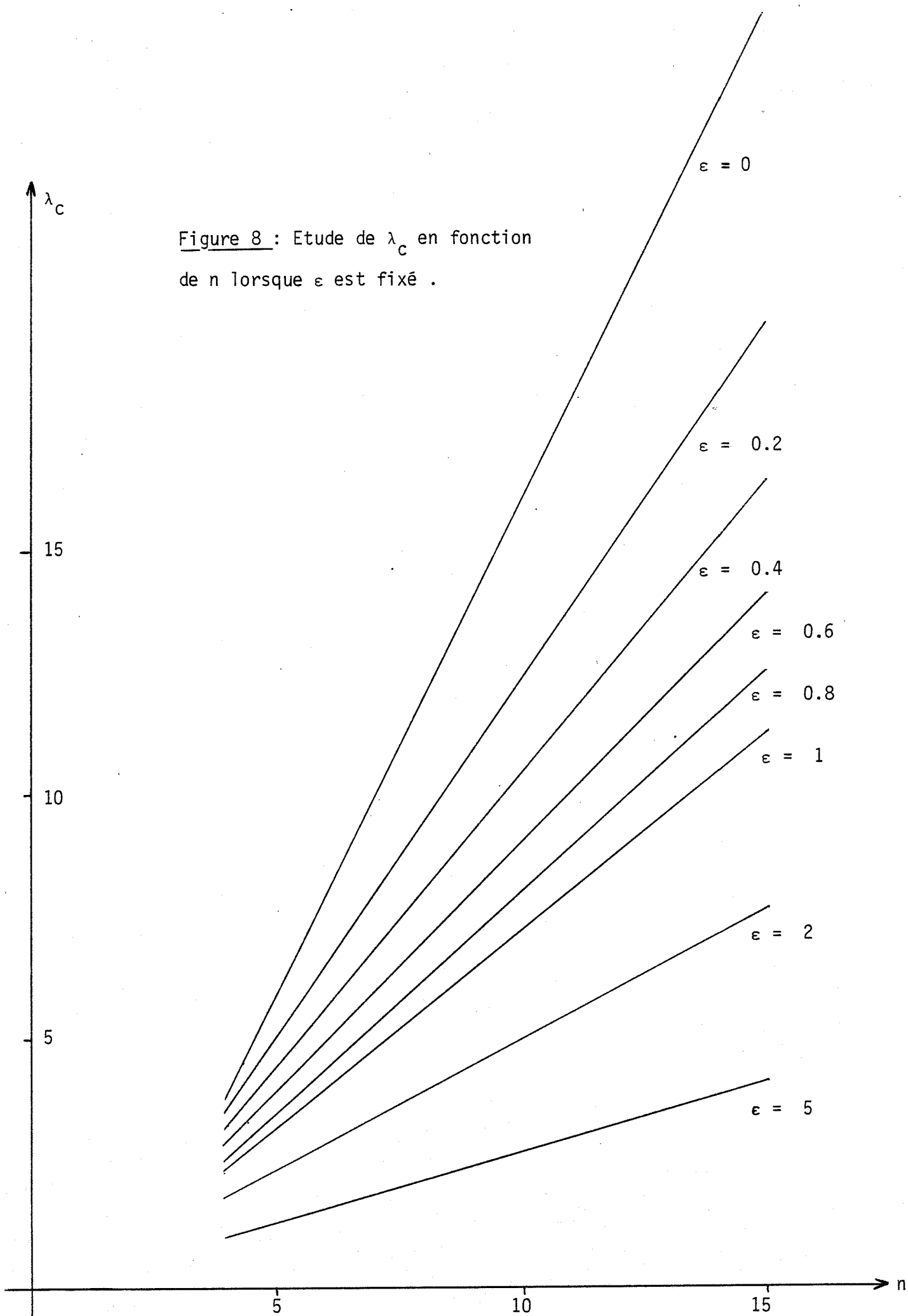
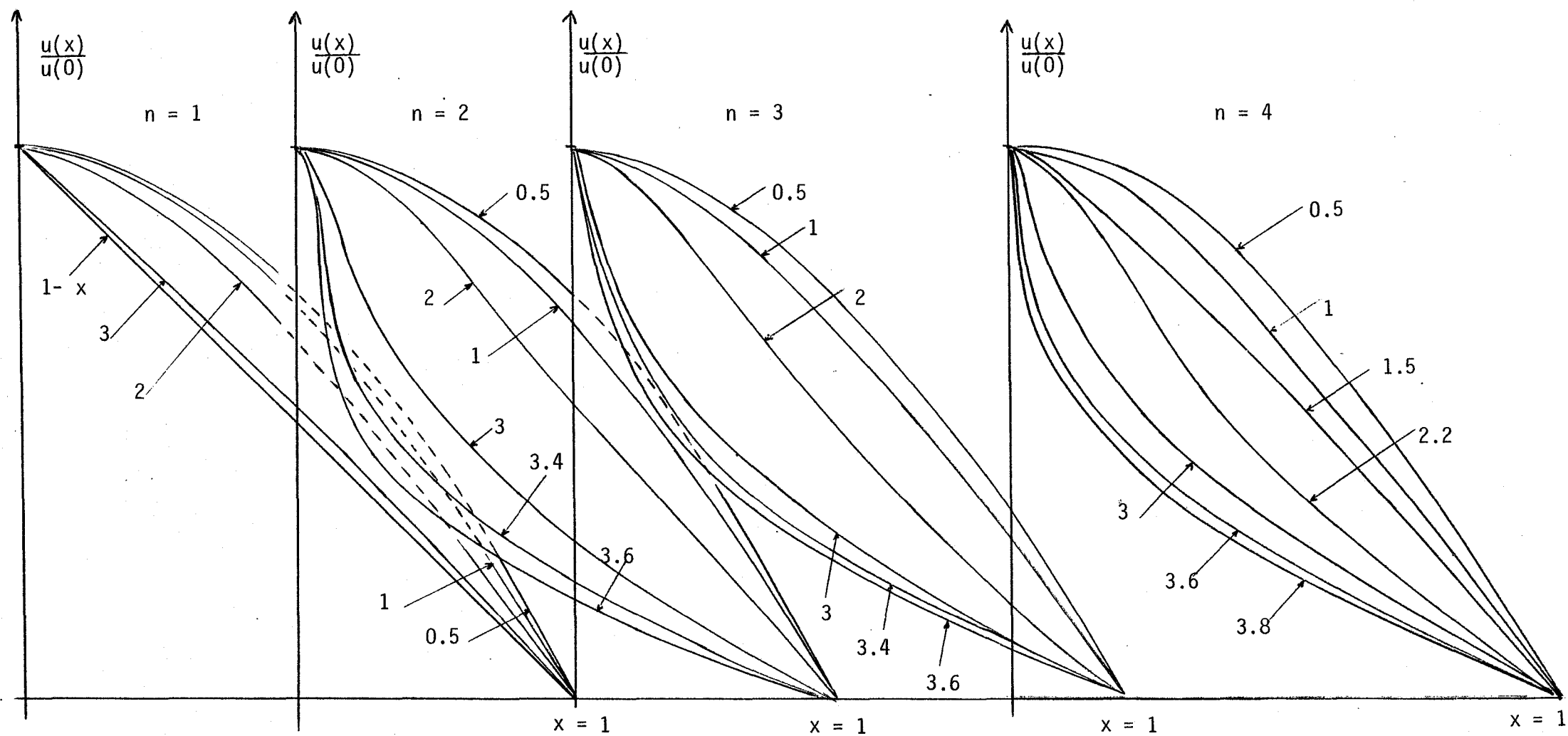


Figure 9 : Evolution des profils normalisés lorsque $u(0) \rightarrow \frac{1}{\epsilon}$
 (convergence vers le point d'arrêt- les indices sur les
 profils représentent $u(0)$)



CHAPITRE IV

SUR UNE CLASSE DE PROBLÈMES ELLIPTIQUES
NON LINEAIRES CONVERGEANT
VERS UN PROBLÈME A FRONTIÈRE LIBRE

S O M M A I R E

I.- INTRODUCTION ET MOTIVATION.

II.- FORMULATION DU PROBLEME GENERAL

III.- STRUCTURE DU PROBLEME PERTURBE ET PROBLEME LIMITE.

III-1 Le problème perturbé

III-2 Convergence du problème perturbé

III-3 Le problème limite à deux phases

IV.- ETUDE DETAILLEE DU PROBLEME PERTURBE LORSQUE $A\psi \geq 0$.

V.- COMPORTEMENT DU PROBLEME PERTURBE LORSQUE $\varepsilon \searrow 0$ ($A\psi \geq 0$)

VI.- ETUDE DE L 'I.V. (V-1). APPROXIMATION DES BRANCHES

APPROXIMATION NUMERIQUE.

VI-1 Existence par méthode de monotonie

VI-2 Convergence des branches de (III-1) vers les branches de (V-1)

VI-3 Un schéma numérique d'approximation

VII.- ETUDE EN GEOMETRIE HYPERSPHERIQUE

VII-1 Rappel de résultats

VII-2 Méthodes numériques pour le problème perturbé

VII-3 Méthode numérique pour l'I.V. limite

VII-4 Etude analytique en dimension 1

VII-5 Résultats numériques et commentaires pour $n > 1$

ANNEXE I : Convergence de la branche inéquation de la solution normalisée lorsque $\psi = a/\infty$ ($n = 1$)

ANNEXE II : Etude analytique de la branche inéquation du problème modèle en dimension 2.

I. INTRODUCTION ET MOTIVATION.

Le travail qui va être exposé dans cette partie a été motivé par l'étude du problème modèle suivant :

L'évolution de la concentration de substrat S et de la température θ dans une membrane enzymatique plane d'épaisseur $2e$ est, sous des hypothèses classiques ([40]) décrite par le système d'équations suivant :

$$(I-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} - D_S \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{V_m S}{K_m + |S|} = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - D_\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \Delta H \frac{V_m S}{K_m + |S|} = 0 \\ S(-e, t) = S(e, t) = S_0; \quad S(x, 0) = 0 \\ \theta(-e, t) = \theta(e, t) = \theta_0; \quad \theta(x, 0) = \theta_0 \end{array} \right. \quad \text{pour } -e < x < e$$

On s'intéresse au régime stationnaire. Dans ce cas, l'élimination de S grâce à la relation :

$$\frac{D_S \Delta H}{D_\theta} S(x) + \theta(x) = \text{constante}$$

conduit à l'équation en θ :

$$(I-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{\Delta H}{D_\theta} V_m \frac{\alpha S_0 + \theta_0 - \theta}{\alpha K_m + |\alpha S_0 + \theta_0 - \theta|} = 0 \\ \theta(-e) = \theta(e) = \theta_0 \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{D_S \Delta H}{D_\theta}$$

Dans ce modèle, D_S , D_θ , ΔH , K_m sont considérés comme variant peu avec la température, tandis que V_m , vitesse maximale de la réaction, en dépend par la loi d'Arrhénius :

$$V_m = V_0 \exp[-E / R \theta]$$

En posant $y = \frac{\theta}{\theta_0}$, $\gamma = \frac{E}{R\theta_0}$ et $x = ey$ on obtient :

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dy^2} + \frac{\Delta H V_0 e^2}{D_\theta \theta_0} \frac{\alpha S_0 + \theta_0 - \theta_0 y}{\alpha K_m + |\alpha S_0 + \theta_0 - \theta_0 y|} e^{-\frac{\gamma}{y}} = 0 \\ y(-1) = y(1) = 1 \end{cases}$$

Enfin, en considérant la transformation $y = 1 + \frac{w}{\gamma}$ on est conduit au problème avec conditions de Dirichlet homogènes au bord :

$$(I-3) \quad \begin{cases} \frac{d^2 w}{dy^2} + \mu \frac{a - w}{\varepsilon + |a - w|} e^{\frac{w}{1+\delta w}} = 0 \\ w(-1) = w(1) = 0 \end{cases}$$

où on a posé : $a = \frac{\alpha \gamma S_0}{\theta_0}$ $\varepsilon = \frac{\alpha \gamma K_m}{\theta_0}$

$$\mu = \frac{\Delta H V_0 e^2 \gamma e^{-\gamma}}{D_\theta \theta_0} ; \quad \delta = \frac{1}{\gamma}$$

Lorsque $a = o(1)$, K_m restant petit devant S_0 , ε joue le rôle d'un paramètre de perturbation, μ étant considéré comme un paramètre de bifurcation.

On se trouve alors dans la situation suivante :

★ le problème (I-3) admet, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lambda \geq 0$, une ou plusieurs solutions, positives, majorées par a , mais :

★ les solutions limites, en un sens à préciser ne peuvent, du moins pour λ assez grand, vérifier le problème réduit :

$$(I-4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 w}{dy^2} + \mu e^{\frac{w}{1 + \delta w}} = 0 \\ w(-1) = w(1) = 0 \end{array} \right.$$

pour l'une des raisons suivantes ;

a) si $\delta > 0$, (I-4) admet des solutions pour tout $\lambda \geq 0$ qui tendent toutes en norme uniforme vers $+\infty$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

b) si $\delta = 0$, (I-4) n'admet pas de solution au-delà d'une certaine valeur critique λ_c ([52]).

Ces diverses situations sont représentées sur la figure 1.

On se propose ici de trouver le problème limite correct et d'étudier sa structure (en particulier lorsque λ est assez grand, ce qui correspond aux branches limites singulières de la figure 1) .

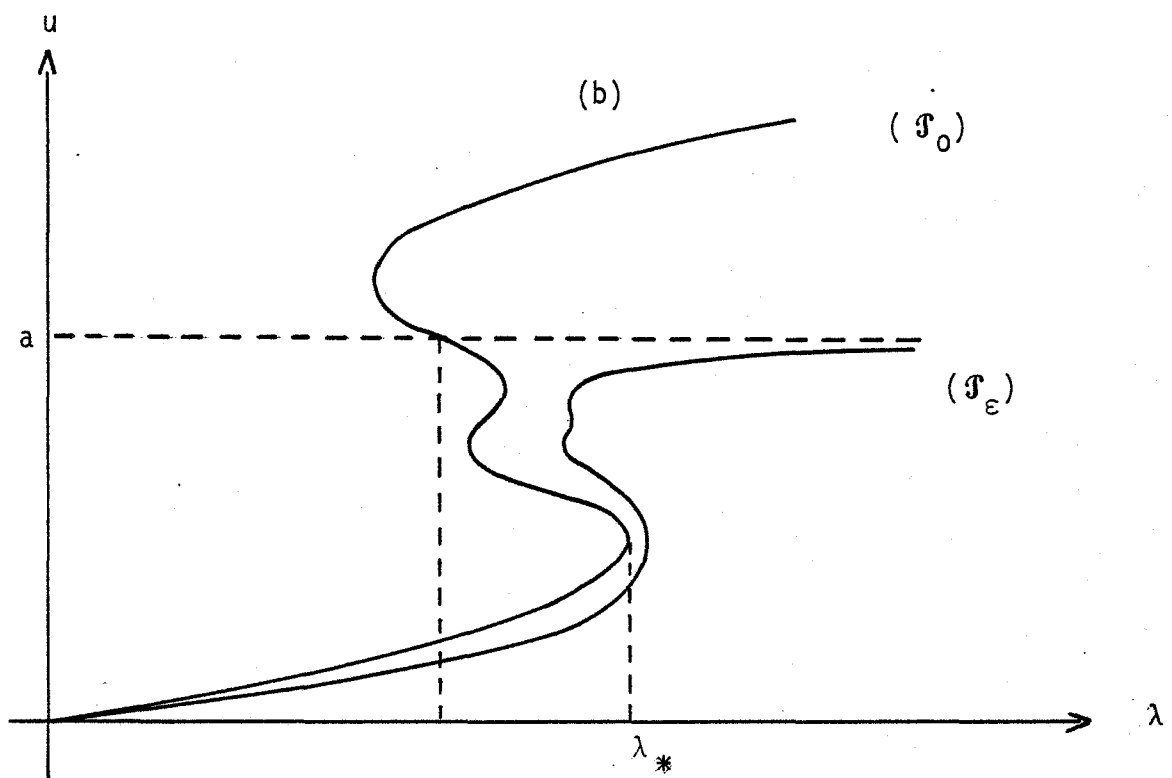
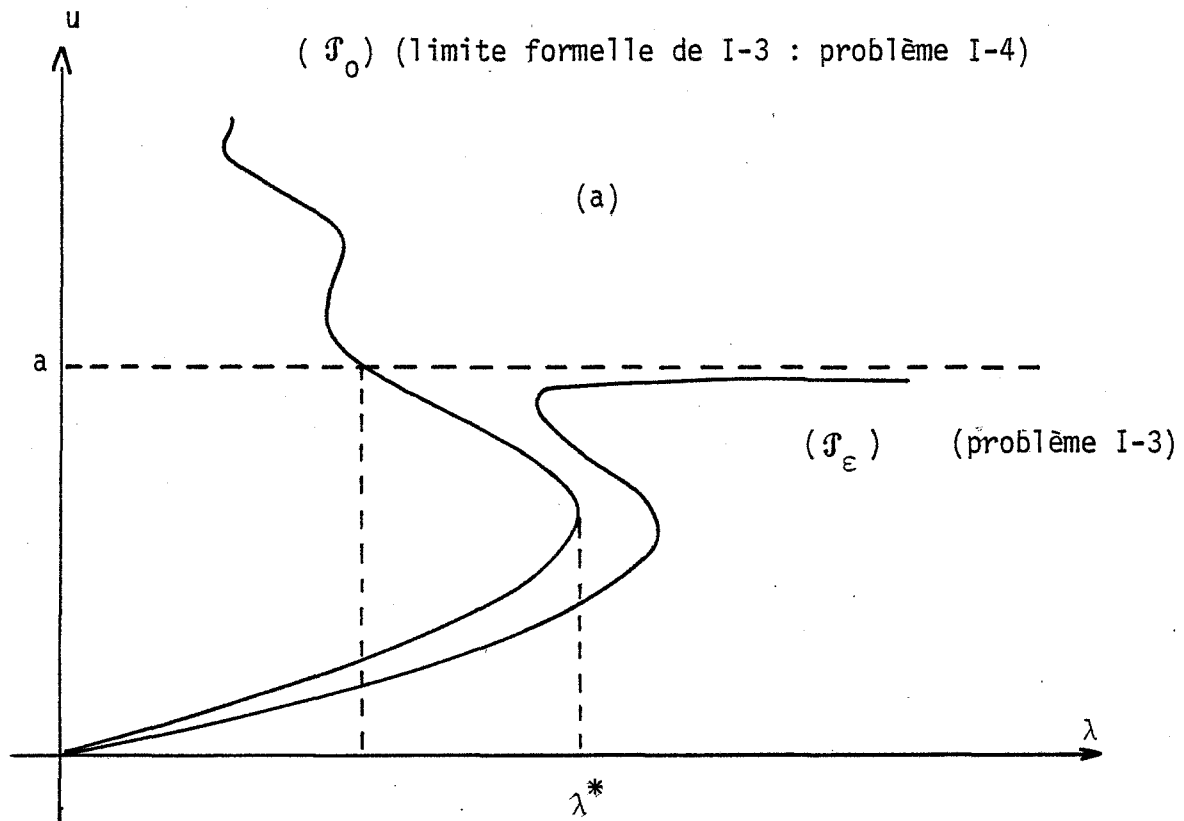


Figure 1 : (a) cas où (\mathcal{P}_0) n'a pas de solution pour λ assez grand.
 (b) cas où (\mathcal{P}_0) a toutes ses solutions $> a$ pour λ grand.

Nous suivrons la méthode utilisée par Brauner et Nicolaenko, qui ont considéré des problèmes également issus de la cinétique enzymatique ou de la catalyse chimique, mais avec des non-linéarités "homographiques" du type suivant ([15][16][17]) :

$$(I-5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta w + \lambda \frac{(1-w)^m}{\varepsilon + (1-w)^{m+K}} = 0 \quad \text{dans } \Omega \text{ ouvert borné} \\ w = 0 \quad \text{sur la frontière } \partial\Omega; \quad m \geq 1; \quad 0 \leq K < 1 \end{array} \right.$$

On va étudier en fait une classe plus générale de problèmes aux limites elliptiques non linéaires du second ordre de la forme :

$$Au = \lambda g(x, u, \varepsilon) = \lambda \frac{\psi(x) - u}{\varepsilon + |\psi(x) - u|} f(u)$$

où, lorsque ε tend vers 0, $g(x, t, \varepsilon)$ converge vers une fonction discontinue selon t .

Après avoir étudié rapidement ce problème "perturbé", on montre qu'à la limite, on obtient des solutions d'un problème à frontière libre qui s'interprète comme un problème à deux phases. Sous certaines conditions ce problème à deux phases dégénère en un problème d'obstacle. Ce cas est traité en détail, en particulier en ce qui concerne la convergence des branches de solutions du problème perturbé vers le problème limite, ainsi que l'approximation numérique du problème limite. Enfin, l'étude théorique est illustrée par des essais numériques portant sur le problème modèle :

$$\Delta u + \lambda \frac{a - u}{\varepsilon + |a - u|} e^u = 0 \quad \text{en géométrie hypersphérique (} \Omega \text{ est la boule unité de } \mathbb{R}^n \text{).}$$

On met ainsi en évidence le fait que le problème d'obstacle limite peut avoir des points de retournement sur la branche inéquation (i.e. la branche de solutions à frontière libre non triviale).

II. FORMULATION DU PROBLEME GENERAL.

Dans toute la suite, nous considérerons le problème "perturbé" suivant :

$$(II-1) \quad \begin{cases} Au = \lambda \frac{\psi(x) - u}{\varepsilon + |\psi(x) - u|} f(u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec les notations suivantes :

♦ Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière $\partial\Omega$ régulière

$$♦ \quad Au = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + c(x)u \quad \text{avec}$$

$$c, a_{ij} \in C^2(\bar{\Omega}), \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad c(x) \geq 0 \quad \text{et}$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall x \in \Omega; \quad \alpha > 0$$

Pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$ on posera :

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} c u v dx \\ &= a_0(u,v) + \int_{\Omega} c \cdot u \cdot v dx \end{aligned}$$

- ♦ les deux paramètres λ et ε ont chacun un rôle spécifique :
 $\lambda \geq 0$ est considéré comme un paramètre de bifurcation, alors que
 $\varepsilon > 0$ joue le rôle de paramètre de perturbation : $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$.
- ♦ la fonction $\psi > 0$, qui jouera ultérieurement le rôle d'un obstacle, est supposée dans $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$
- ♦ la non-linéarité f vérifie les hypothèses suivantes :
 - (i) $f \in C^2(\mathbb{R})$
 - (ii) f est ≥ 0 sur \mathbb{R} , $f(0) > 0$
 - (iii) f est croissante (au sens large).

Dans le cas particulier $\psi \equiv a$, $f(t) = -e^{\frac{t}{1 + \delta t}}$, $\delta > 0$ et $A = -\Delta$, on trouve le problème modèle de l'introduction.

On prend les notations usuelles pour les produits scalaires et les normes sur $L^2(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$:

$$|u| = (u, u)^{1/2} = \left(\int_{\Omega} u^2 dx \right)^{1/2} \quad \forall u \in L^2(\Omega)$$

$$\|u\| = |\nabla u| \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

III. STRUCTURE DU PROBLEME PERTURBE. PROBLEME LIMITE.

III-1 Le problème perturbé.

On dira que $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution de (II-1) si $f(u) \in L^2(\Omega)$ et si (II-1) est vérifié p.p. (donc $u \in H^2(\Omega)$). On utilisera la forme variationnelle de (II-1) :

$$(III-1) \quad \begin{cases} a(u,v) = \lambda \left(\frac{\psi - u}{\varepsilon + |\psi - u|} f(u), v \right) \\ \forall v \in H_0^1(\Omega); u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Proposition III-1 : soient $\lambda \geq 0, \varepsilon > 0$ fixés :

- ♦ Toute solution u de (III-1) vérifie : $0 \leq u(x) \leq |\psi|_\infty$ p.p. sur Ω
- ♦ Le problème (III-1) possède au moins une solution $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ telle que $0 \leq u(x) \leq |\psi|_\infty$ et, en fait, une solution maximale et une solution minimale.

Preuve : - pour la première partie il suffit de prendre $v = u^- = \max(-u, 0)$ ou $v = (u - |\psi|_\infty)^+ = \max(u - |\psi|_\infty, 0)$ dans (III-1) pour obtenir les inégalités

- pour la deuxième partie, on note que $u \equiv 0$ est une sous-solution de (III-1), $u \equiv |\psi|_\infty$ est une sur-solution de (III-1); il suffit ensuite d'adapter une méthode de monotonie classique (cf. Amann [2]) pour conclure. Finalement, la régularité $W^{2,p}(\Omega)$ s'obtient par le fait que

$$\left| \frac{\psi - u}{\varepsilon + |\psi - u|} f(u) \right| \leq f(|\psi|_\infty) \in L^p(\Omega)$$

et en appliquant les estimations de Agmon-Douglis-Nirenberg ([1]) ■

III-2 Convergence du problème perturbé.

Proposition III-2 : Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \geq 0}$ une famille de solutions de (III-1), pour λ fixé. Il existe au moins une valeur d'adhérence dans la topologie $W^{2,p}(\Omega)$ faible $\forall p \geq 2$, lorsque $\varepsilon \searrow 0$. Toute valeur d'adhérence u vérifie l'inéquation :

$$(III-2) \quad \begin{cases} a(u, v-u) + \lambda(f(u), v-u) + 2\lambda(f(u), (v-\psi)^-) \geq 2\lambda(f(u), (u-\psi)^-) \\ u \in H_0^1(\Omega); \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

(on peut prendre en particulier les familles $\underline{u}_\varepsilon$ (resp. \overline{u}_ε) de solutions minimales (resp. maximales)).

Preuve : soit u_ε une solution de (III-1); on a

$$0 \leq u_\varepsilon \leq |\psi|_\infty \implies 0 \leq f(u_\varepsilon) \leq f(|\psi|_\infty) \quad \text{et}$$

$$|Au_\varepsilon(x)| = \lambda \frac{|\psi - u_\varepsilon|}{\varepsilon + |\psi - u_\varepsilon|} f(u_\varepsilon) \leq \lambda f(|\psi|_\infty)$$

donc Au_ε est dans un borné de $L^p(\Omega) \forall p \implies u_\varepsilon$ est borné dans $W^{2,p}(\Omega) \forall p > 2$; soit $u = \lim u_\varepsilon$ dans $W^{2,p}(\Omega)$ faible et $H_0^1(\Omega)$ fort (et p.p.).

$$\begin{aligned} \text{On pose } Z_\varepsilon &= a(u_\varepsilon, v-u_\varepsilon) + \lambda(f(u_\varepsilon), v-u_\varepsilon) \\ &\quad + 2\lambda(f(u), (v-\psi)^- - (u_\varepsilon-\psi)^-) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Comme } u_\varepsilon &\longrightarrow u \text{ dans } H_0^1(\Omega), \text{ on a } \lim_{\varepsilon \searrow 0} a(u_\varepsilon, v-u_\varepsilon) = \\ &= a(u, v-u) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Le deuxième terme tend vers $\lambda(f(u), v-u)$ par le théorème de Lebesgue car $|f(u_\varepsilon) \cdot (v - u_\varepsilon)| \leq f(|\psi|_\infty)(|v| + |\psi|_\infty)$.

Enfin, étant donné que $v \rightarrow v^-$ est continue de $H_0^1(\Omega)$ dans lui-même, le dernier terme tend vers

$$2\lambda(f(u), (v - \psi)^- - (u - \psi)^-)$$

donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_\varepsilon = a(u, v-u) + \lambda(f(u), v - u) + 2\lambda(f(u), (v - \psi)^- - (u - \psi)^-).$$

Il suffit, pour conclure, de montrer que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_\varepsilon \geq 0$

En utilisant l'équation (III-1) pour exprimer $a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon &= \lambda(f(u_\varepsilon) \left(\frac{\psi - u_\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - u_\varepsilon|} + 1 \right), v - u_\varepsilon) + \\ &\quad + 2\lambda(f(u_\varepsilon), (v - \psi)^- - (u_\varepsilon - \psi)^-) \\ &= \lambda(f(u_\varepsilon) \left(\frac{\psi - u_\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - u_\varepsilon|} + 1 \right), (v - \psi)^+ - (v - \psi)^- - (u_\varepsilon - \psi)^+ + (u_\varepsilon - \psi)^-) \\ &\quad + 2\lambda(f(u_\varepsilon), (v - \psi)^- - (u_\varepsilon - \psi)^-) \\ &= \lambda \left(\left(1 - \frac{\psi - u_\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - u_\varepsilon|} \right) f(u_\varepsilon), (v - \psi)^- \right) \\ &\quad + \lambda \left(\left(\frac{\psi - u_\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - u_\varepsilon|} - 1 \right) f(u_\varepsilon), (u_\varepsilon - \psi)^- \right) \\ &\quad + \lambda \left(\left(1 + \frac{\psi - u_\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - u_\varepsilon|} \right) f(u_\varepsilon), (v - \psi)^+ \right) \\ &\quad - \lambda \left(\left(1 + \frac{\psi - u_\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - u_\varepsilon|} \right) f(u_\varepsilon), (u_\varepsilon - \psi)^+ \right) \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \lambda \left(\left(\frac{\psi - u_\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - u_\varepsilon|} - 1 \right) f(u_\varepsilon), (u_\varepsilon - \psi)^- \right) \\ &\quad - \lambda \left(\left(1 + \frac{\psi - u_\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - u_\varepsilon|} \right) f(u_\varepsilon), (u_\varepsilon - \psi)^+ \right) \end{aligned}$$

(les deux autres termes sont ≥ 0).

Or chacun de ces termes tend vers 0 : pour le premier,

$$\int_{\psi > u_\varepsilon} \left(\frac{\psi - u_\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - u_\varepsilon|} - 1 \right) f(u_\varepsilon) (\psi - u_\varepsilon) dx = - \int_{\psi > u_\varepsilon} \varepsilon \frac{\psi - u_\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - u_\varepsilon|} f(u_\varepsilon) dx$$

est borné par $\varepsilon f(|\psi|_\infty) \text{mes}(\Omega)$

Pour le deuxième

$$\begin{aligned} &\int_{u_\varepsilon > \psi} \left(1 + \frac{\psi - u_\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - u_\varepsilon|} \right) f(u_\varepsilon) (u_\varepsilon - \psi) dx = \\ &= - \int_{u_\varepsilon > \psi} \varepsilon f(u_\varepsilon) \frac{\psi - u_\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - u_\varepsilon|} dx \quad \text{est borné de la même façon} \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque : On a prouvé en particulier que l'I.V. (III-2) admettait au moins une solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$; on va voir ci-après que toute solution de (III-2) a cette régularité.

III-3. Interprétation et formulation forte de (III-2)

En écrivant, dans (III-2) que

$$v - u = v - \psi - (u - \psi) = (v - \psi)^+ - (v - \psi)^- - (u - \psi)^+ + (u - \psi)^-$$

on voit immédiatement que (III-2) est équivalente à la formulation :

$$(III-2)' \quad \begin{cases} a(u, v-u) + \lambda(f(u), |v - \psi|) - \lambda(f(u), |u - \psi|) \geq 0 \\ \forall v \in H_0^1(\Omega); \quad u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

et, en particulier si $f \equiv 1$, on a une I.V. de 2ème espèce :

$$a(u, v-u) + \lambda j(v - \psi) - \lambda j(u - \psi) \geq 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

avec $j(w) = \int_{\Omega} |w| dx$

Pour $u \in W^{2,p}(\Omega)$, (III-2') conduit alors à une formulation forte :

on remarque d'abord que (III-2'), qui s'écrit aussi :

$$(A u, v-u) + \lambda(f(u), |v - \psi|) - \lambda(f(u), |u - \psi|) \geq 0$$

est valable alors, sous cette forme, pour toute fonction $v \in L^2(\Omega)$, par densité.

• on choisit d'abord $v = \psi + \mu w$, $\mu \geq 0$, $w \geq 0$

dans cette formulation, ce qui donne, $\forall \mu \geq 0$:

$$\mu(Au, w) + \mu\lambda(f(u), w) \geq (Au, u - \psi) + \lambda(f(u), |u - \psi|)$$

d'où l'on tire les deux relations :

$$Au + \lambda f(u) \geq 0 \quad \text{p.p.}$$

$$(Au, u - \psi) + \lambda(f(u), |u - \psi|) \leq 0$$

• on choisit ensuite $v = \psi - \mu w$, $\mu \geq 0$, $w \geq 0$, ce qui donne la relation supplémentaire :

$$- Au + \lambda f(u) \geq 0 \quad \text{p.p.}$$

Donc (III-2') implique les relations suivantes :

$$-\lambda f(u) \leq Au \leq \lambda f(u) \quad \text{p.p. sur } \Omega$$

$$(Au, u - \psi) + \lambda(f(u), |u - \psi|) \leq 0$$

- en multipliant les relations $Au + \lambda f(u) \geq 0$ et $-Au + \lambda f(u) \geq 0$ p.p. par, respectivement, $(u - \psi)^+$ et $(u - \psi)^-$ et en faisant la somme on obtient :

$$Au(u - \psi) + \lambda f(u) |u - \psi| \geq 0 \quad \text{p.p.}$$

- Si on intègre cette relation sur Ω , on obtient :

$$(Au, u - \psi) + \lambda(f(u), |u - \psi|) \geq 0$$

Mais d'après la relation complémentaire, on a aussi :

$$(Au, u - \psi) + \lambda(f(u), |u - \psi|) \leq 0,$$

d'où l'on déduit que en fait,

$$Au(u - \psi) + \lambda f(u) |u - \psi| = 0 \quad \text{p.p. Donc (III-2) implique}$$

la formulation forte :

$$(III-2'') \left\{ \begin{array}{l} -\lambda f(u) \leq Au \leq \lambda f(u) \quad \text{p.p. sur } \Omega \\ Au(u - \psi) + \lambda f(u) |u - \psi| = 0 \quad \text{p.p. sur } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Réciproquement, en multipliant les relations $Au + \lambda f(u) \geq 0$,

$-Au + \lambda f(u) \geq 0$ par, respectivement $(v - \psi)^+$ et $(v - \psi)^-$

et en faisant la somme on obtient :

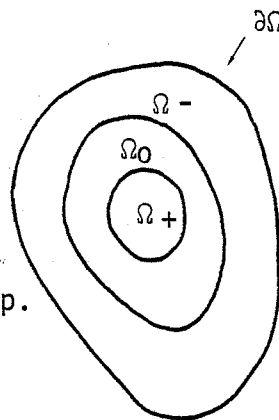
$$(Au, v - \psi) + \lambda(f(u), |v - \psi|) \geq 0 \quad \text{qui redonne exactement}$$

(III-2') si on retranche la relation complémentaire.

Interprétation en termes de problème à frontière libre.

(III-2'') équivaut à (III-2''') :

$$\begin{cases} Au \in [-\lambda f(u), \lambda f(u)] & \text{p.p.} \\ (u - \psi)^+[Au + \lambda f(u)] = (u - \psi)^-[Au - \lambda f(u)] & \text{p.p.} \\ u = 0 & \text{sur } \Omega, u \in W^{2,p}(\Omega) \end{cases}$$



donc $Au + \lambda f(u) = 0$ sur $\Omega_+ = \{x / u(x) > \psi(x)\}$, $Au - \lambda f(u) = 0$

sur $\Omega_- = \{x / u(x) < \psi(x)\}$ et $Au \in [-\lambda f(u), \lambda f(u)]$

sur $\Omega_0 = \{x / u(x) = \psi(x)\}$ avec les conditions de transmission usuelles sur $\partial\Omega_+$ et $\partial\Omega_- \setminus \partial\Omega$ pour u et $\frac{\partial u}{\partial n}$: on a un problème à deux phases.

III-4. Le problème limite à deux phases.

Proposition III-3 : toute solution u de (III-2) a la régularité $W^{2,p}(\Omega) \forall p > 2$ donc $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$, $\alpha \in (0,1)$.

Preuve : on pose $g(x) = f(u(x))$. Alors u est la solution unique de l'inéquation :

$$\begin{cases} a(u, v - u) + \lambda(g, v - u) + 2\lambda(g, (v - \psi)^-) \geq 2\lambda(g, (u - \psi)^-) \\ u \in H_0^1(\Omega); \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

(la fonctionnelle $j(v) = \lambda \int_{\Omega} g.v + 2\lambda \int_{\Omega} g(v - \psi)^-$

est convexe s.c.i. sur $H_0^1(\Omega)$ et l'I.V. s'écrit :

$$a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq 0).$$

Mais cette solution u s'obtient comme limite dans $W^{2,p}(\Omega)$ des u_ε solution de :

$$Au_\varepsilon = \lambda \frac{\psi - u_\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - u_\varepsilon|} g(x) \quad g(x) \in L^p(\Omega) \quad \forall p > 2 \quad \blacksquare$$

Proposition III-4 : on pose $K = \{v \in H_0^1(\Omega) / v \leq \psi \text{ p.p. sur } \Omega\}$
Si u , solution de (III-2) est dans K , alors u est une solution du problème d'obstacle :

$$(III-3) \quad \begin{cases} a(u, v - u) \geq \lambda(f(u), v - u) \\ \forall v \in K; \quad u \in K. \end{cases}$$

En particulier, si $A\psi$ est une mesure ≥ 0 , l'I.V. (III-2) se réduit au problème d'obstacle (III-3). Si $A\psi + \lambda_0 f(\psi) \geq 0$, le résultat est vrai pour $\lambda \geq \lambda_0$.

Preuve : Si $u \in K, v \in K$, on a $(u - \psi)^- = \psi - u, (v - \psi)^- = \psi - v$ et (III-2) s'écrit pour $v \in K$:

$$a(u, v - u) + \lambda(f(u), v - u) + 2\lambda(f(u), \psi - v - (\psi - u)) \geq 0 \quad \text{i.e.} \\ a(u, v - u) \geq \lambda(f(u), v - u).$$

Soit ensuite u une solution quelconque de (III-2) et supposons

$$a(\psi, Z) + \lambda(f(\psi), Z) \geq 0 \quad \forall Z \in H_0^1(\Omega), \quad Z \geq 0$$

On choisit $v = u - (u - \psi)^+ \in H_0^1(\Omega)$ dans (III-2) :

$$- a(u, (u - \psi)^+) - \lambda(f(u), (u - \psi)^+) + 2\lambda(f(u), (-(u - \psi)^-)^-) \\ \geq 2\lambda(f(u), (u - \psi)^-) \quad \text{i.e.}$$

$$- a(u, (u - \psi)^+) - \lambda(f(u), (u - \psi)^+) \geq 0 \iff$$

$$- a((u - \psi)^+, (u - \psi)^+) \geq \lambda(f(u), (u - \psi)^+) + a(\psi, (u - \psi)^+) \geq 0$$

$\implies (u - \psi)^+ = 0 \implies u \leq \psi \quad \text{p.p. et il suffit d'appliquer la première partie de la proposition} \quad \blacksquare$

Proposition III-5 : On suppose que $A\psi$ est une mesure ≥ 0 et soit u_ε une solution de (III-1). Alors $u_\varepsilon \in K$ et si $\varepsilon \searrow 0_+$, on a convergence de u_ε (après extraction....) vers une solution de l'I.V. :

$$(III-3) \quad \begin{cases} a(u, v-u) \geq \lambda(f(u), v-u) \\ u \in K; \quad \forall v \in K \end{cases}$$

Preuve : la convergence vers (III-3) résulte des propositions (III-2) et (III-4). Il reste à montrer que $u_\varepsilon \in K$.

On reprend le problème perturbé (III-1) sous la forme :

$$a(u_\varepsilon - \psi, v) = \lambda \left(\frac{\psi - u_\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - u_\varepsilon|} f(u_\varepsilon), v \right) - a(\psi, v)$$

et on prend $v = (u_\varepsilon - \psi)^+$:

$$\begin{aligned} a((u_\varepsilon - \psi)^+, (u_\varepsilon - \psi)^+) &= -\lambda \left(\frac{(u_\varepsilon - \psi)^+}{\varepsilon + |\psi - u_\varepsilon|} f(u_\varepsilon), (u_\varepsilon - \psi)^+ \right) - a(\psi, (u_\varepsilon - \psi)^+) \\ a((u_\varepsilon - \psi)^+, (u_\varepsilon - \psi)^+) &\leq 0 \implies (u_\varepsilon - \psi)^+ = 0 \text{ i.e. } u_\varepsilon \leq \psi \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque : si $A\psi + \lambda f(\psi) \geq 0$ à λ fixé seulement, on ne sait pas si $u_\varepsilon \in K$.

Conclusion :

- ★ dans le cas général on a convergence du problème perturbé (III-1) vers le problème à deux phases (III-2).
- ★ si $A\psi \geq 0$ le problème à deux phases se réduit au problème (d'obstacle) à une phase $\{u < \psi\}$ (III-3)
- ★ dans ce cas, le problème perturbé (III-1) est une approximation de (III-3), intérieure au convexe.

Pour terminer, voici quelques exemples montrant que, lorsque $A\psi$ n'est pas ≥ 0 on peut avoir plusieurs situations (en particulier en ce qui concerne la zone de coïncidence $\{u = \psi\}$).

Exemple III-1 :

$$A = -\Delta, \Omega =]-1, 1[, f(t) \equiv 1, \psi(x) = 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Si f est constante, on a toujours l'unicité dans (III-2) car

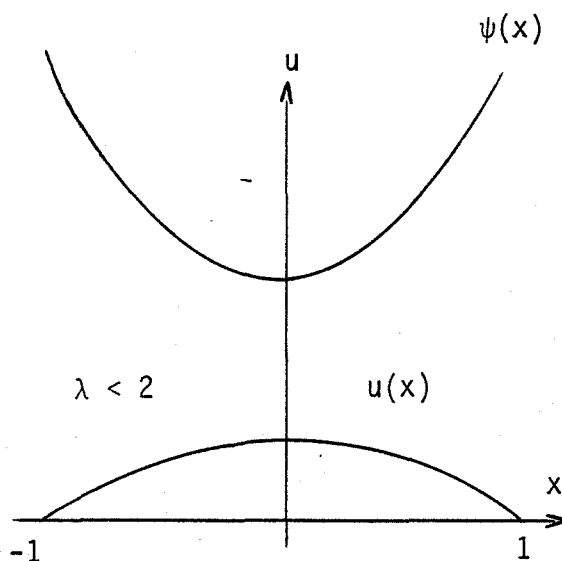
$$j(v) = \lambda \int_{\Omega} v \, dx + 2\lambda \int_{\Omega} (v - \psi)^- dx \quad \text{est convexe.}$$

La solution de (III-2) est la suivante :

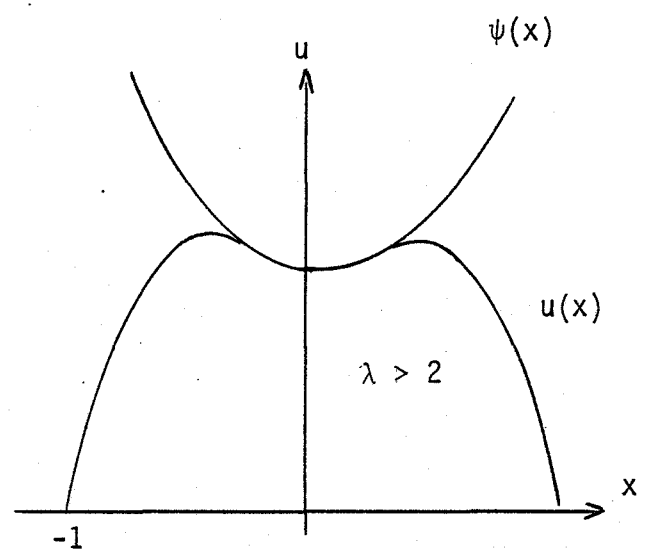
$$\underline{\lambda \leq 2 = \lambda_c} : u(x) = \frac{\lambda}{2} (1 - x^2) \quad (\text{solution équation}).$$

$$\underline{\lambda > 2} : u(x) = \begin{cases} \psi(x) : 0 < x < \rho \\ -\frac{\lambda}{2} x^2 + (\lambda+1)\rho x + \frac{\lambda}{2} - (\lambda+1)\rho & \rho < x < 1 \end{cases}$$

$$\text{avec } \lambda = \frac{2 \left[1 + \rho - \frac{\rho^2}{2} \right]}{(\rho - 1)^2}$$



Phase $\{u < \psi\}$



Phase $\{u < \psi\}$ + nuage $\{u = \psi\}$

Jamais de phase $\{u > \psi\}$

Exemple III-2 :

$A = -\Delta$, $\Omega =]-1, 1[$, $f(t) \equiv 1$, $\psi(x) = 1 + 2x^2$
(ici $\lambda_c = 2 < \Delta\psi$ ce qui change tout).

La solution (unique) de (III-2) est la suivante :

$$\underline{\lambda \leq \lambda_c = 2} : u(x) = \frac{\lambda}{2} (1 - x^2)$$

On doit avoir $\Delta u \in [-\lambda, \lambda]$. Or sur $\{u = \psi\}$ on a $\Delta u = \Delta\psi = 4$
donc pour $2 < \lambda < 4$ on n'a pas de nuage $\{u = \psi\}$ de mesure > 0 .

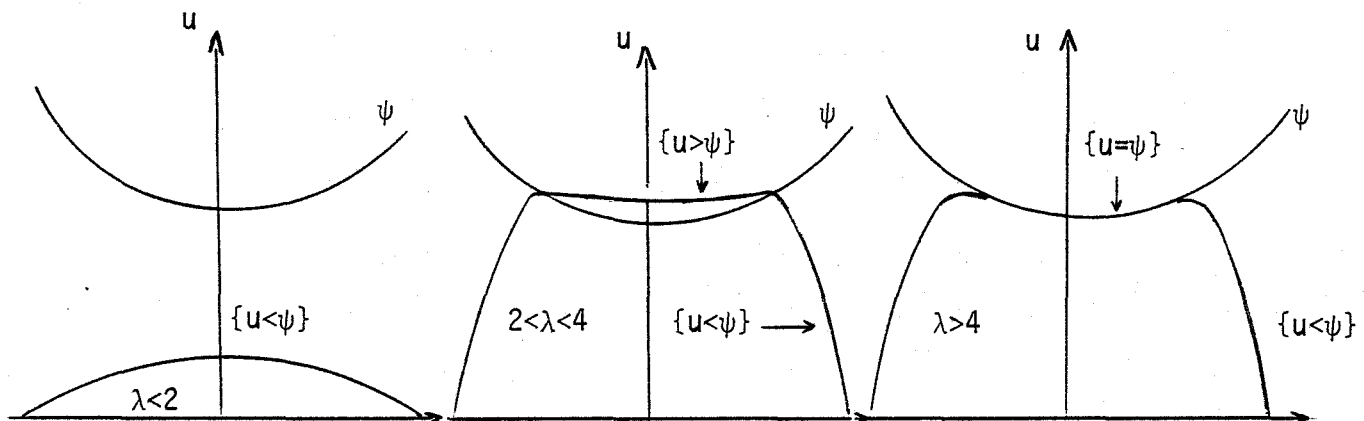
$$\underline{2 < \lambda < 4} : \begin{cases} \frac{\lambda}{2} (x^2 - \rho^2) + 1 + 2\rho^2 & 0 < x < \rho \\ -\frac{\lambda}{2} x^2 + 2\lambda\rho x + \frac{\lambda}{2} - 2\lambda\rho & \rho < x < 1 \end{cases}$$

$$\text{avec } \lambda = \frac{2(1 + 2\rho^2)}{3\rho^2 - 4\rho + 1} = \frac{2(1 + 2\rho^2)}{(1-\rho)(1-3\rho)}$$

Pour $\underline{\lambda = 4}$, la solution $u > \psi$ colle à l'obstacle ψ (et $\rho = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{1}{3}$).

$$\underline{\lambda > 4} \quad u(x) = \begin{cases} \psi(x) & 0 < x < \rho \\ -\frac{\lambda}{2} x^2 + (\lambda+4)\rho x + \frac{\lambda}{2} - (\lambda+4)\rho & \rho < x < 1 \end{cases}$$

$$\text{avec } \lambda = 2 \frac{(1 + 4\rho - 2\rho^2)}{(1-\rho)^2}$$



2 phases présentes

Exemple III-3 : (obstacle irrégulier)

$$A = -\Delta, \quad \psi(x) = 1 + |x|$$

$$\underline{\lambda < \lambda_c = 2} \quad : \quad u(x) = \frac{\lambda}{2} (1 - x^2)$$

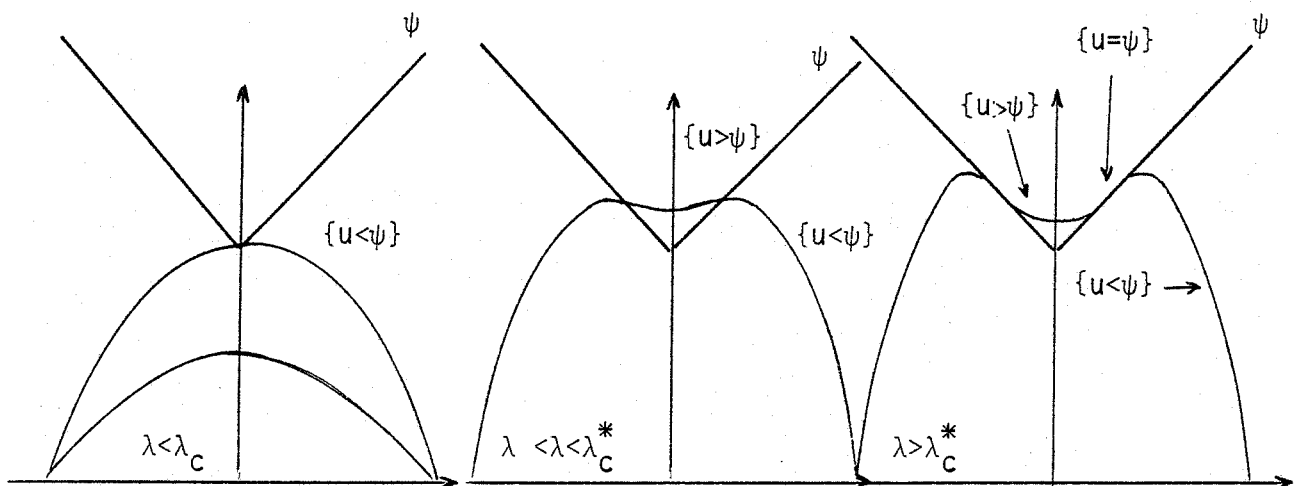
$$\underline{2 < \lambda < \lambda_c^*} \quad u(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2} x^2 + 1 + r - \lambda \frac{r^2}{2} & 0 < x < r \\ -\frac{\lambda}{2} x^2 + 2\lambda r x + 1 + r + \frac{\lambda r^2}{2} - 2\lambda r^2 & r < x < 1 \end{cases}$$

(tant que $u'(r) < 1$)

$$\text{avec } \lambda = \frac{2(1+r)}{3r^2 - 4r + 1} ; \lambda_c^* \text{ est obtenu pour } r = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$(\lambda_c = 3 + 2\sqrt{2})$$

$\underline{\lambda_c^* < \lambda}$: on a un problème à 2 phases plus un nuage $\{u = \psi\}$ pour $\frac{1}{\lambda} < |x| < 1 - \frac{2}{\sqrt{\lambda}}$ et u tend vers ψ lorsque λ tend vers $+\infty$



2 phases présentes

2 Phases présentes

+ un nuage $\{u = \psi\}$

IV. ETUDE DETAILLEE DU PROBLEME PERTURBE LORSQUE $A\psi \geq 0$.

On vient de voir que si $a(\psi, Z) \geq 0$, $\forall Z \in H_0^1(\Omega)$, $Z \geq 0$ les solutions du problème perturbé vérifiaient $u \leq \psi$ et convergeaient vers les solutions du problème d'obstacle associé à $Au - \lambda f(u)$ et ψ . On peut obtenir des résultats de convergence plus précis et, en particulier de la monotonie en considérant des schémas itératifs classiques définissant les solutions maximale et minimale, tant pour le problème perturbé que pour le problème limite. On va reprendre complètement l'étude dans ce cas, d'abord pour le problème perturbé :

$$(III-2) \quad \begin{cases} a(u, v) = \lambda \left(\frac{\psi - u}{\varepsilon + |\psi - u|} f(u), v \right) \\ \forall v \in H_0^1(\Omega); u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

On va utiliser le fait que ψ est sur-solution de (III-1).

Proposition IV-1 : pour tous $\varepsilon > 0$, $\lambda \geq 0$, (III-1) admet au moins une solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $\forall p > 1$. Une telle solution vérifie toujours : $0 \leq u_\varepsilon(x) \leq \psi(x)$.

Preuve : soit $u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega)$ une solution de (III-1). On prend

$$v = (\psi - u_\varepsilon)^- = - \inf (\psi - u_\varepsilon, 0) \in H_0^1(\Omega) \quad \text{dans (III-1) :}$$

$$\begin{aligned} & - a(\psi - u_\varepsilon, (\psi - u_\varepsilon)^-) + a(\psi, (\psi - u_\varepsilon)^-) = \\ & = \lambda \int_{\Omega} f(u_\varepsilon) \frac{\psi - u_\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - u_\varepsilon|} (\psi - u_\varepsilon)^- dx \implies \end{aligned}$$

$$a((\psi - u_\varepsilon)^-, (\psi - u_\varepsilon)^-) = -a(\psi, (\psi - u_\varepsilon)^-) - \lambda \int_{\Omega} \frac{f(u_\varepsilon)(\psi - u_\varepsilon)^{-2}}{\varepsilon + |\psi - u_\varepsilon|} dx \leq 0$$

$$\implies (\psi - u_\varepsilon)^- = 0 \implies u_\varepsilon \leq \psi \text{ p.p.}$$

Dans ce cas, on a alors $Au_\varepsilon = \lambda \frac{\psi - u_\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - u_\varepsilon|} f(u_\varepsilon) \geq 0$

et on en déduit que $u_\varepsilon \geq 0$ sur Ω . Si $\psi \in H^2(\Omega)$ et si $A\psi \not\equiv 0$ ou si $\psi \not\equiv 0$ sur $\partial\Omega$, on a même $u_\varepsilon < \psi$ p.p. sur Ω par le principe du maximum appliqué à $\psi - u_\varepsilon$.

Pour l'existence on peut simplement noter que $u \equiv 0$ est une sous-solution de (III-1), que $u \equiv \psi$ est une sur-solution, puis d'adapter à ce cas faible ($\psi \in H^1(\Omega)$) les résultats classiques de Amann ([2]). Comme nous aurons besoin dans la suite du procédé de construction des solutions minimale et maximale, nous allons détailler la méthode, adaptée de [12].

On notera $\underline{u}(\lambda, \varepsilon, \cdot)$, resp. $\overline{u}(\lambda, \varepsilon, \cdot)$ les solutions minimale, resp. maximale de (III-1).

Soit T l'application qui, à toute fonction $v \in L^\infty(\Omega)$ associe l'unique fonction $w = Tv \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ solution du problème linéaire :

$$(IV-I) \quad \begin{cases} Aw = \lambda \frac{\psi - w}{\varepsilon + |\psi - w|} f(v) \\ w \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

La régularité est assurée par le fait que $w \in H_0^1(\Omega)$ vérifie :

$$0 \leq w(x) \leq \psi(x), \text{ donc } \frac{\psi - w}{\varepsilon + |\psi - v|} f(v) \in L^p(\Omega) \quad \forall p > 1.$$

Proposition IV-2 : on pose $\underline{u}_n(\lambda, \varepsilon, \cdot) = T^n(0)$ et $\bar{u}_n(\lambda, \varepsilon, \cdot) = T^n(\psi)$.

Alors $\underline{u}_n(\lambda, \varepsilon, \cdot) / \underline{u}(\lambda, \varepsilon, \cdot)$ et $\bar{u}_n(\lambda, \varepsilon, \cdot) \setminus \bar{u}(\lambda, \varepsilon, \cdot)$ presque partout et dans $H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ pour tout $p > 1$ donc aussi dans $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$, $0 \leq \alpha < 1$.

Preuve : comme pour la proposition (IV-1) on montre que $0 \leq Tv(x) \leq \psi(x)$

$$\forall v \in L^\infty(\Omega), \text{ et en particulier : } 0 \leq T(0) \text{ et } T(\psi) \leq \psi$$

Il suffit pour la monotonie d'établir par conséquent que T est croissante.

Soit $w_1 = T(v_1)$ $w_2 = T(v_2)$ avec $v_1 \leq v_2$ p.p.

$$\text{On pose } g(x, t) = \frac{f(t)}{\varepsilon + |\psi(x) - t|}. \text{ D'après (iii), } g(x, \cdot) \text{ est croissante}$$

sur $[0, \psi(x)] \quad \forall x \in \Omega \text{ (et } g \geq 0 \text{)}.$

Des équations vérifiées par w_1 et w_2 :

$$Aw_1 = \lambda(\psi - w_1) g(x, v_1)$$

$$Aw_2 = \lambda(\psi - w_2) g(x, v_2)$$

on déduit, avec $w = w_2 - w_1$ que :

$$Aw + \lambda w g(x, v_2) = \lambda(\psi - w_1) [g(x, v_2) - g(x, v_1)] \geq 0$$

soit $w \geq 0$ p.p. par le principe du maximum ce qui assure la croissance de T .

Donc $0 \leq u_* = \lim \underline{u}_n \leq \lim \bar{u}_n = u^* \leq \psi$ les limites étant prises ponctuellement.

En choisissant $v = \underline{u}_n$ (resp. \bar{u}_n) dans la formulation faible de (IV-1) :

$$a(\underline{u}_n, v) = \lambda \left(\frac{\psi - \underline{u}_n}{\varepsilon + |\psi - \underline{u}_{n-1}|} f(\underline{u}_{n-1}), v \right) \quad (\text{resp.})$$

on a l'estimation : $a(\underline{u}_n, \underline{u}_n) \leq \frac{\lambda}{\varepsilon} \int_{\Omega} \psi f(\underline{u}_{n-1}) \underline{u}_n \, dx \leq \frac{\lambda}{\varepsilon} f(|\psi|_{\infty}) |\psi|_2^2$

donc, après éventuellement une extraction on a convergence dans $H_0^1(\Omega)$ faible (et p.p.) vers u_* (resp. u^*) et un passage à la limite facile (*) montre que les limites sont bien des solutions de l'équation (III-1).

Si u est une solution quelconque de (III-1) dans $L^{\infty}(\Omega)$, alors $0 \leq u \leq \psi$; en appliquant l'opérateur T :

$\underline{u}_n = T^n(0) \leq T^n(u) = u \leq T^n(\psi) = \bar{u}_n$ et en passant à la limite, on montre que $u_* \leq u \leq u^*$ c'est-à-dire que $\underline{u} = u_*$ et $\bar{u} = u^*$.

Il reste à établir la convergence forte dans $W^{2,p}(\Omega)$ de \underline{u}_n (resp. \bar{u}_n) vers \underline{u} (resp. \bar{u}). On a, avec $u_n = \underline{u}_n$ (ou \bar{u}_n) et $u = \underline{u}$ (ou \bar{u}) :

$$Au_n = \lambda(\psi - u_n) g(x, u_{n-1})$$

$$Au = \lambda(\psi - u) g(x, u)$$

Or $(\psi - u_n) g(u_{n-1})$ converge presque partout vers $(\psi - u) g(u)$ et est borné par $\psi g(|\psi|_{\infty}) \in L^p(\Omega) \, \forall p > 1$ donc on a la convergence des seconds membres dans $L^p(\Omega)$ et, par les estimations classiques de Agmon - Douglis - Nirenberg ([1]) $u_n \rightarrow u$ dans $W^{2,p}(\Omega) \, \forall p > 1$ ■

Remarque : si ψ n'est pas solution du problème (III-2) on a $T\psi < \psi$ p.p. donc $u_{\varepsilon} \leq \bar{u}_{\varepsilon} < \psi$ pour toute solution u_{ε} de (III-1), ce qu'on avait déjà

(*) possible car toute la suite converge p.p. donc dans $L^q(\Omega) \, \forall q > 1$.

noté dans la proposition IV-1.

Proposition IV-3 : on considère la relation d'ordre usuelle sur les fonctions de $L^\infty(\Omega)$

a) l'application $\lambda \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow \underline{u}(\lambda, \varepsilon, \cdot)$ (resp. $\bar{u}(\lambda, \varepsilon, \cdot)$) est croissante (ε, ψ fixés)

b) l'application $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \underline{u}(\lambda, \varepsilon, \cdot)$ (resp. $\bar{u}(\lambda, \varepsilon, \cdot)$) est décroissante (λ, ψ fixés)

c) l'application $\psi \in L_+^\infty(\Omega) \longrightarrow \underline{u}(\lambda, \varepsilon, \cdot)$ (resp. $\bar{u}(\lambda, \varepsilon, \cdot)$) est croissante (λ, ε fixés).

Preuve : il suffit de vérifier les relations d'ordre ad hoc sur les suites construites à partir de T , ou, puisque $v \longrightarrow Tv$ est monotone, de vérifier ces relations d'ordre sur T considéré comme fonction de λ, ε ou ψ .

Assertion a) : Si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ et si $v \in L^\infty(\Omega)$, montrons que

$w_1 = T_{\lambda_1}(v) \leq w_2 = T_{\lambda_2}(v)$. En effet :

$$Aw_1 = \lambda_1(\psi - w_1) g(x, v) :$$

$$\text{et avec } w = w_2 - w_1$$

$$Aw_2 = \lambda_2(\psi - w_2) g(x, v)$$

$$Aw + \lambda_1 g(x, v)w = (\lambda_2 - \lambda_1) g(x, v)(\psi - w_2) \geq 0$$

ce qui implique $w \geq 0$ par le principe du maximum.

Assertion b) : soit $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ et $w_1 = T_{\varepsilon_1}(v)$, $w_2 = T_{\varepsilon_2}(v)$, $v \in L^\infty(\Omega)$

et $w = w_2 - w_1$

$$Aw_1 = \lambda(\psi - w_1) f(v) / \varepsilon_1 + |\psi - v|$$

$$Aw_2 = \lambda(\psi - w_2) f(v) / \varepsilon_2 + |\psi - v|$$

$$Aw + \lambda \frac{f(v)}{\varepsilon_1 + |\psi - v|} \quad w = \lambda(\psi - w_2)f(v) \left[\frac{1}{\varepsilon_2 + |\psi - v|} - \frac{1}{\varepsilon_1 + |\psi - v|} \right]$$

qui est ≤ 0 donc $w \leq 0$.

Assertion c) : pour la solution minimale on raisonne comme en a) et

b) en notant que $\psi \rightarrow \frac{\psi - w}{\varepsilon + |\psi - v|}$ est croissante pour $w \leq \psi$, $v \leq \psi$

fixés donc $T_{\psi_1}(v) \leq T_{\psi_2}(v)$ si $\psi_1 \leq \psi_2$ et $v \leq \psi_1$, en particulier

$T_{\psi_1}^n(0) \leq T_{\psi_2}^n(T_{\psi_1}^{n-1}(0)) \dots \leq T_{\psi_2}^n(0)$; pour la solution maximale, on note

que si $\psi_2 \geq \psi_1$ alors ψ_2 est une sur-solution pour le problème (III-1) re-

latif à ψ_1 , donc on peut partir de la même sur-solution ψ_2 dans les deux

cas $(III-1)_{\psi_1}$ et $(III-1)_{\psi_2}$ et opérer comme avec les solutions minimales ■

Pour des obstacles "pas trop grands", on a l'unicité globale pour le problème (III-1).

Proposition IV-4 : Si $\text{Sup}\{tf'(t) - f(t) / 0 \leq t \leq |\psi|_\infty\} < 0$

le problème (III-1) admet une solution unique quels que soient $\varepsilon > 0, \lambda \geq 0$.

Preuve : On suit la méthode de Cohen-Laetsch ([31]). Soit, pour $\lambda > 0, \varepsilon > 0$

fixés, u une solution de (III-1) et \bar{u} la solution maximale. On va montrer

que $u = \bar{u}$. On écrit les équations vérifiées par u et \bar{u} :

$$Au = \lambda \frac{\psi - u}{\varepsilon + |\psi - u|} \quad f(u) = \lambda h(x, u)$$

$$A\bar{u} = \lambda \frac{\psi - \bar{u}}{\varepsilon + |\psi - \bar{u}|} \quad f(\bar{u}) = \lambda h(x, \bar{u})$$

qu'on multiplie, respectivement, par \bar{u} et u et qu'on intègre :

$$a(u, \bar{u}) - a(\bar{u}, u) = 0 = \lambda \int_{\Omega} [h(x, u)\bar{u} - h(x, \bar{u})u] dx$$

$$\text{donc} \quad \int_{\Omega} \left[\frac{h(x, u)}{u} - \frac{h(x, \bar{u})}{\bar{u}} \right] u \bar{u} dx = 0$$

où u et \bar{u} sont > 0 par le principe du maximum.

On aura $u = \bar{u}$ p.p. si $\frac{h(x, t)}{t} = \frac{\psi(x) - t}{\varepsilon + |\psi(x) - t|} \frac{f(t)}{t}$ est strictement décroissante. Or, si $0 \leq t \leq \psi(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} h(x, t) &= \frac{-\varepsilon}{(\varepsilon + \psi(x) - t)^2} \frac{f(t)}{t} + \frac{\psi(x) - t}{\varepsilon + \psi(x) - t} \cdot \frac{t f'(t) - f(t)}{t^2} \\ &\leq \frac{-\varepsilon}{(\varepsilon + |\psi|_{\infty})^2} \inf \left\{ \frac{f(t)}{t} / 0 < t < |\psi|_{\infty} \right\} < 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Pour ε et ψ fixés, on examine maintenant ce qui se passe lorsque $\lambda \rightarrow 0_+$ et $\lambda \rightarrow +\infty$.

On a d'abord le résultat suivant :

Proposition IV-5 (cas $\varepsilon > 0$ fixé, $\lambda \rightarrow 0$) : Pour λ assez petit, la solution de (III-1) est unique et $\lim_{\lambda \rightarrow 0_+} u(\lambda, \varepsilon, \cdot) = 0$ dans $W^{2,p}(\Omega)$. On a en fait l'existence d'une branche $(\lambda, \underline{u}(\lambda))$ pour $0 \leq \lambda < \lambda^*$ $\lambda^* \leq \infty$ étant maximal vis-à-vis de l'inversibilité de l'opérateur $w \rightarrow Aw - \lambda h'(\underline{u}(\lambda))w$ où l'on a posé :

$$h(t) = \frac{\psi - t}{\varepsilon + |\psi - t|} f(t)$$

Preuve : Soit $u(\lambda)$ une solution de (III-1), $0 \leq u(\lambda) \leq \psi$.

Lorsque $\lambda \rightarrow 0$, $\frac{\psi - u(\lambda)}{\varepsilon + |\psi - u(\lambda)|} f(u(\lambda))$ étant borné, $Au(\lambda)$ tend vers 0

dans $L^p(\Omega)$, donc $u(\lambda) \rightarrow 0$ dans $W^{2,p}(\Omega)$. Pour l'unicité, soit

$\underline{u}(\lambda)$ une solution de (III-1) et $w = u(\lambda) - \underline{u}(\lambda)$. Si $u(\lambda) \neq \underline{u}(\lambda)$

alors $w > 0$ sur Ω par le principe du maximum et

$$Aw = \lambda \frac{h(u(\lambda)) - h(\underline{u}(\lambda))}{u(\lambda) - \underline{u}(\lambda)} \quad w = \lambda H(x, \lambda) w$$

Puisque $u(\lambda)$ et $\underline{u}(\lambda)$ tendent vers 0 dans $W^{2,p}(\Omega)$ $p > 1$, donc dans

$C(\bar{\Omega})$ lorsque $\lambda \searrow 0_+$ et que h est C^1 , $H(x, \lambda)$ reste borné, ce qui

donne $w = 0$ pour λ assez petit et conduit à une contradiction. La

deuxième partie de la proposition, existence du λ^* et d'une branche,

résulte du théorème des fonctions implicites ([38]) ■

Proposition IV-6 (cas $\varepsilon > 0$ fixé, $\lambda \rightarrow \infty$) : On a $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \underline{u}(\lambda) = \psi$ dans $L^2(\Omega)$ et p.p., toute solution de (III-1) tend vers ψ avec apparition d'une couche limite au bord de Ω si $\psi \notin H_0^1(\Omega)$.

Preuve : Soit $u_1(\lambda) = T_\lambda(0)$. Comme $u_1(\lambda) \leq \underline{u}(\lambda) \leq \psi$ il suffit, pour la convergence, de voir que $u_1(\lambda) \rightarrow \psi$ (p.p. et $L^2(\Omega)$). Or u_1 est solution de l'équation

$$\begin{cases} Au_1 = \frac{\lambda}{\varepsilon + \psi} f(0) (\psi - u_1) \\ u_1 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} Au_1 + \frac{\lambda f(0)}{\varepsilon + \psi} u_1 = \frac{\lambda \psi}{\varepsilon + \psi} f(0) \\ u_1 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $Z = (u_1 - \psi)\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Un calcul élémentaire montre que, dans $H^{-1}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} AZ = \varphi A(u_1 - \psi) - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_1 - \psi) \\ - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) (u_1 - \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

ce qui donne l'équation suivante pour Z :

$$\begin{aligned} AZ + \frac{\lambda f(0)}{\varepsilon + \psi} Z = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_1 - \psi) - \\ - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) (u_1 - \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) - \varphi A\psi \end{aligned}$$

On prend le produit de dualité de cette équation par $Z \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \alpha \|Z\|^2 + \frac{\lambda f(0)}{\varepsilon + |\psi|_\infty} |Z|^2 \leq a(Z, Z) + \lambda f(0) \left(\frac{Z}{\varepsilon + \psi}, Z \right) \\ = - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_1 - \psi) \cdot \varphi \cdot (u_1 - \psi) dx \\ + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) (u_1 - \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} ((u_1 - \psi)\varphi) dx \\ = \widetilde{a(\varphi\psi, \varphi Z)} \quad \text{où } \widetilde{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)} \text{ est égale à 1 sur le support de } \varphi. \end{aligned}$$

En remplaçant dans la première intégrale

$$\varphi \frac{\partial}{\partial x_j} (u_1 - \psi) \text{ par } \frac{\partial Z}{\partial x_j} - (u_1 - \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

on obtient la majoration suivante :

$$\alpha \|Z\|^2 + \frac{\lambda f(0)}{\varepsilon + \|\psi\|_\infty} |Z|^2 \leq C + C \|Z\|$$

les constantes C dépendant de ψ et φ (et φ) et après application de l'inégalité de Young :

$$\frac{\alpha}{2} \|Z\|^2 + \frac{\lambda f(0)}{\varepsilon + \|\psi\|_\infty} |Z|^2 \leq C \quad (\text{indép. de } \lambda)$$

d'où l'on déduit, $f(0)$ étant > 0 , que $|Z| \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}}$ tend vers 0 si $\lambda \rightarrow \infty$

Donc à $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ fixé, $\lim Z = 0$ dans $L^2(\Omega)$. En prenant $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi = 1$ sur un compact quelconque de Ω , $0 \leq \varphi \leq 1$ sur Ω on en déduit que $u_1(\Omega) \rightarrow \psi$ dans $L^2(\Omega)$ lorsque $\lambda \rightarrow \infty$, donc $\underline{u}(\lambda) \rightarrow \psi$ dans $L^2(\Omega)$ puisque $0 \leq u_1(\lambda) \leq \underline{u}(\lambda) \leq \psi$. Par extraction, on a : $\lim \underline{u}(\lambda') = \psi$ p.p. lorsque $\lambda' \rightarrow \infty$; comme $\underline{u}(\lambda)$ est croissante en λ , on a le résultat : $\underline{u}(\lambda) \rightarrow \psi$ dans $L^2(\Omega)$ et p.p. Comme $\|Z\|$ est borné pour φ fixé, on a aussi, modulo une extraction : $Z \rightarrow 0$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible (φ étant fixé!).

Il en résulte que toute solution de (III-1) tend vers ψ dans $L^2(\Omega)$ et p.p. et en fait, dans $L^q(\Omega) \forall q > 1$. ■

Remarque 1. Le fait que $\underline{u}(\lambda)$ converge vers ψ dans $L^2(\Omega)$ est une conséquence directe du Théorème 1 de [30] au moins si $L = -\Delta$

On a dans ce cas un résultat plus précis puisque, non seulement

$$\int_{\Omega} |\underline{u}(\lambda) - \psi|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{mais également} \quad \int_{\Omega} u_0^2 |\nabla \underline{u}(\lambda) - \nabla \psi| dx \longrightarrow 0$$

lorsque $\lambda \rightarrow \infty$ où u_0 est la fonction propre positive principale de l'opérateur $-\Delta$, normalisée par $\|u_0\|_{\infty} = 1$.

Ce résultat donne des indications sur la structure de la couche limite près du bord lorsque $\psi \notin H_0^1(\Omega)$.

Remarque 2 : Si $\psi \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,\infty}(\Omega)$ on démontre, en utilisant le principe du maximum, que pour toute solution u de (III-1) on a, pour λ assez grand, indépendamment de ε :

$$\frac{\|\psi - u\|_{\infty}}{\varepsilon + \|\psi - u\|_{\infty}} \leq \frac{C}{\lambda} \quad \text{ce qui implique :}$$

$$\|\psi - u\| \leq \frac{C \varepsilon}{\lambda} \quad \text{où } C \text{ est une constante indépendante de } \varepsilon.$$

Ce résultat implique l'unicité pour le problème perturbé lorsque λ est assez grand, uniformément par rapport à ε (borné).

En effet, posant $w = \bar{u}(\lambda) - \underline{u}(\lambda)$ on a :

$$Aw = -\lambda \varepsilon \frac{f(\xi)}{(\varepsilon + \psi - \xi)^2} w + \lambda \frac{\psi - \xi}{\varepsilon + \psi - \xi} f'(\xi) w$$

$$\text{avec} \quad \underline{u}(x) \leq \xi(x) \leq \bar{u}(x) \implies$$

$$0 = a(w, w) + \lambda \varepsilon \left(\frac{f(\xi)}{(\varepsilon + \psi - \xi)^2} w, w \right) - \lambda \left(\frac{\psi - \xi}{\varepsilon + \psi - \xi} f'(\xi) w, w \right)$$

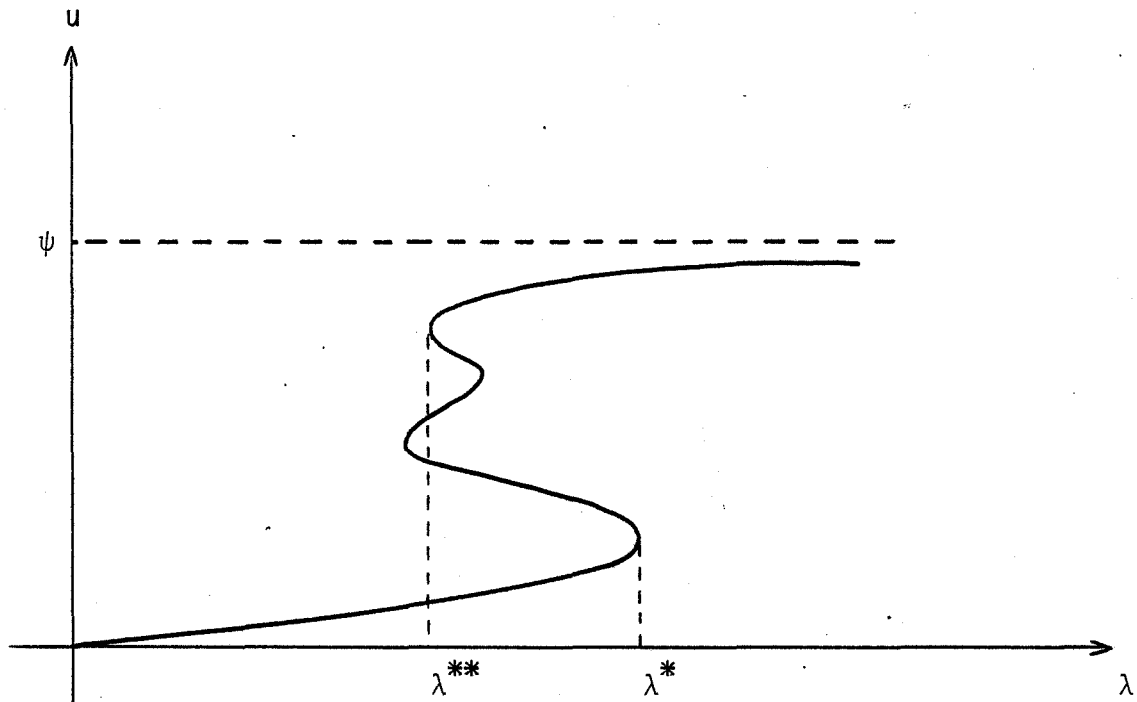
$$\geq \left[\alpha + \frac{\lambda f(0)}{\varepsilon \left(\frac{C}{\lambda} + 1 \right)^2} - C \{ \sup_{t \in [0, \|\psi\|_{\infty}] } f'(t) \} \right] |w|^2 > 0$$

dès que $\lambda \geq \Lambda(\varepsilon_0)$ pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$

ce qui donne $w = 0$.

L'unicité pour λ assez grand étant prouvée, on peut considérer la branche de solutions $(\lambda, \bar{u}(\lambda)), \lambda > \lambda^{**}$ issue de $\lambda = +\infty$, $\bar{u}(\infty) = \psi$ et maximale vis à vis de l'inversibilité de l'opérateur (*)

$w \longrightarrow Aw - \lambda h'(\bar{u}(\lambda))w$, ce qui peut être illustré, pour le problème (III-1) à ε fixé de la façon suivante :



On conjecture que l'unicité pour λ assez grand est vraie pour $\psi \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ (mais plus uniforme selon $\varepsilon \rightarrow 0_+$).

(*) l'inversibilité résulte de la démonstration de l'unicité en remplaçant ξ par \bar{u} .

V. COMPORTEMENT DU PROBLEME PERTURBE LORSQUE ϵ TEND VERS 0 (cas $A\psi \geq 0$)

Nous allons, dans le cas $A\psi \geq 0$, préciser le résultat de convergence du problème perturbé vers un problème d'obstacle et, dans un premier temps, examiner le comportement des solutions du problème perturbé :

$$(III-1) \quad \begin{cases} Au = \lambda \frac{\psi - u}{\epsilon + |\psi - u|} f(u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

vis à vis du problème réduit ($\epsilon = 0$) :

$$(III-0) \quad \begin{cases} Au = \lambda f(u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

lorsque ϵ tend vers 0, à λ fixé.

En fait, si les solutions (positives) de (III-0) sont majorées par l'obstacle ψ , on a convergence des branches minimale et maximale de (III-1) vers les branches correspondantes de (III-0) si celles-ci existent.

Si, au contraire, au moins une solution de (III-0) n'est pas majorée par ψ pour une valeur λ fixée, ou s'il n'y a pas de solution, le comportement limite sera singulier, on aura, pour $\psi - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{\epsilon}(\lambda, x)$, une frontière

libre : on montrera que \underline{u}_{ϵ} (et aussi \overline{u}_{ϵ}) converge vers une solution d'une inéquation variationnelle.

Rappelons (cf. Chapitre 0) que l'ensemble des $\lambda \geq 0$ tels que (III-0) ait une solution est un intervalle $[0, \lambda^*)$, $0 < \lambda^* \leq +\infty$, qu'il existe une solution minimale $\underline{u}(\lambda)$ pour $\lambda < \lambda^*$, croissante en λ et que :

♦ Si $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ alors $\lambda^* = +\infty$ et $|\underline{u}(\lambda)|_\infty \rightarrow +\infty$ ($f(0) > 0$, f vérifiant les hypothèses (i), (ii), (iii) du § II).

Si f est positive croissante convexe, au contraire $\lambda^* < +\infty$, on n'a pas de solution pour $\lambda > \lambda^*$ et la branche $\lambda \rightarrow \underline{u}(\lambda)$, est stable pour $\lambda < \lambda^*$. Des exemples typiques de telles situations sont donnés par, respectivement $e^{\frac{u}{1+\delta u}}$, $\delta > 0$ et e^u ; lorsque λ est assez grand, on a dans les deux cas un comportement singulier pour (III-1) lorsque ε tend vers 0 (cf. introduction, fig.1).

Proposition V-1 : on suppose que, pour λ fixé, (III-0) admet une solution minimale $\underline{u} \in W^{2,p}(\Omega) \forall p > 1$, vérifiant $\underline{u} < \psi$. Si $\underline{u}_\varepsilon$ désigne la solution minimale de (III-1), alors $\underline{u}_\varepsilon / \underline{u}$ lorsque $\varepsilon \downarrow 0$, p.p. et dans $H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$, $\forall p > 1$.

Preuve : on a vu que si ε décroît, $\underline{u}_\varepsilon$ croît, et comme $0 \leq \underline{u}_\varepsilon \leq \psi$ on a, lorsque $\varepsilon \downarrow 0$, $\underline{u}_\varepsilon / u_* \leq \psi$.

Montrons d'abord que $u_* \leq \underline{u} < \psi$. Il suffit de voir que $\underline{u}_\varepsilon \leq \underline{u}$.

Or $A\underline{u} = \lambda f(\underline{u}) \geq \lambda \frac{\psi - \underline{u}}{\varepsilon + |\psi - \underline{u}|} f(\underline{u})$ donc \underline{u} est une sur-solution

positive de (III-1), la solution minimale $\underline{u}_\varepsilon$ de (III-1) est $\underline{u}_\varepsilon \leq \underline{u} \implies u_* \leq \underline{u}$.

Montrons maintenant que u_* est solution de (III-0) :

En prenant $v = \underline{u}_\varepsilon$ dans la formulation faible (III-1) on obtient l'estimation :

$$\alpha \| \underline{u}_\varepsilon \|^2 \leq a(\underline{u}_\varepsilon, \underline{u}_\varepsilon) = \lambda \int_{\Omega} \frac{\psi - \underline{u}_\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - \underline{u}_\varepsilon|} \underline{u}_\varepsilon f(\underline{u}_\varepsilon) dx$$

$$\leq \lambda \|\psi\|_{\infty} \|f(\psi)\|_{\infty} \text{mes}(\Omega)$$

donc $\underline{u}_\varepsilon$ reste borné dans $H_0^1(\Omega)$ et $\underline{u}_\varepsilon \rightarrow u_*$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible (et p.p.)

Considérons alors la formulation faible (III-1) :

$$a(\underline{u}_\varepsilon, v) = \lambda \left(\frac{\psi - \underline{u}_\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - \underline{u}_\varepsilon|} f(\underline{u}_\varepsilon), v \right) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Puisque $\underline{u}_\varepsilon / u_* < \psi$:

$$\frac{\psi - \underline{u}_\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - \underline{u}_\varepsilon|} \longrightarrow 1 \text{ dans } L^\infty(\Omega)$$

et on peut passer à la limite sur le terme de droite par le théorème de Lebesgue, ce qui prouve que $a(u_*, v) = \lambda(f(u_*), v)$, donc u_* est une solution de (III-0). Comme $u_* \leq \underline{u}$, solution minimale, on a en fait $u_* = \underline{u}$.

Il reste à établir la convergence dans $W^{2,p}(\Omega)$:

On écrit les équations donnant $\underline{u}_\varepsilon$ et $u_* = \underline{u}$:

$$Au_* = \lambda f(u_*)$$

$$A\underline{u}_\varepsilon = \lambda \frac{\psi - \underline{u}_\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - \underline{u}_\varepsilon|} f(\underline{u}_\varepsilon)$$

Puisque $u_* < \psi$ on a convergence p.p. de $\frac{\psi - \underline{u}_\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - \underline{u}_\varepsilon|} f(\underline{u}_\varepsilon)$ vers $f(u_*)$

et en fait :

$$\frac{\psi - \underline{u}_\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - \underline{u}_\varepsilon|} f(\underline{u}_\varepsilon) \leq |f(u_*)|_{\infty} \leq |f(\psi)|_{\infty}$$

D'après le théorème de Lebesgue, on a la convergence de $\frac{\psi - \underline{u}_\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - \underline{u}_\varepsilon|} f(\underline{u}_\varepsilon)$ vers $f(u_*)$ dans $L^p(\Omega)$, d'où, par les estimations de [1], convergence de $\underline{u}_\varepsilon$ vers u_* dans $W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ■

Remarque : on peut préciser la convergence de $\underline{u}_\varepsilon$ vers $u_* = \underline{u}$.
En faisant la différence des équations donnant u_* et $\underline{u}_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} A(u_* - \underline{u}_\varepsilon) &= \lambda \left[f(u_*) - f(\underline{u}_\varepsilon) + \frac{\varepsilon f(\underline{u}_\varepsilon)}{\varepsilon + |\psi - \underline{u}_\varepsilon|} \right] \\ &= \lambda \left[-f'(u_*)(\underline{u}_\varepsilon - u_*) + O((\underline{u}_\varepsilon - u_*)^2) + \frac{\varepsilon f(\underline{u}_\varepsilon)}{\varepsilon + |\psi - \underline{u}_\varepsilon|} \right] \\ A(u_* - \underline{u}_\varepsilon) + \lambda f'(u_*)(\underline{u}_\varepsilon - u_*) &= \lambda \frac{\varepsilon f(\underline{u}_\varepsilon)}{\varepsilon + |\psi - \underline{u}_\varepsilon|} + \lambda O(|\underline{u}_\varepsilon - u_*|^2) \end{aligned}$$

d'où en multipliant par $u_* - \underline{u}_\varepsilon$ et en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} a(u_* - \underline{u}_\varepsilon, u_* - \underline{u}_\varepsilon) - \lambda (f'(u_*)(u_* - \underline{u}_\varepsilon), u_* - \underline{u}_\varepsilon) &\leq \\ &\leq \lambda \varepsilon \int_{\Omega} \frac{f(\underline{u}_\varepsilon)}{\varepsilon + |\psi - \underline{u}_\varepsilon|} (u_* - \underline{u}_\varepsilon) dx + C_2 \lambda |u_* - \underline{u}_\varepsilon|^3 \leq \\ &\leq \lambda \varepsilon \int_{\Omega} \frac{f(\underline{u}_\varepsilon)(\psi - \underline{u}_\varepsilon)}{\varepsilon + |\psi - \underline{u}_\varepsilon|} dx + C_2 \lambda |u_* - \underline{u}_\varepsilon|^3 \leq \lambda C_1 \varepsilon + \lambda C_2 |u_* - \underline{u}_\varepsilon|^3. \end{aligned}$$

On considère la branche de (III-o) issue de $(\lambda = 0, u = 0)$ et maximale vis à vis de l'inversibilité de l'opérateur $A - \lambda f'(u)$, définie pour $0 \leq \lambda < \lambda_M \leq +\infty$. Pour tout $\lambda < \lambda_M$, tel que $\underline{u}(\lambda) < \psi$ la majoration ci-dessus montre que :

$||\underline{u}(\lambda) - \underline{u}_\varepsilon(\lambda)|| \leq C(\lambda)\sqrt{\varepsilon}$ (et, en fait $C(\lambda)\varepsilon$ si on sait que $|\psi - \underline{u}(\lambda)|^{-1} \in L^2(\Omega)$).

On a une convergence analogue de la branche maximale de (III-1) vers la branche maximale de (III-0) issue de $\lambda = +\infty$, si elle existe, et si les solutions de (III-0) sont majorées par l'obstacle.

Donnons maintenant une conséquence de la proposition V-1 :

Corollaire V-1 : on suppose que, pour un λ fixé :

(i) ou bien (III-0) n'a pas de solution

(ii) ou bien aucune solution de (III-0) n'est majorée sur tout Ω par ψ .

Soit \underline{u} la limite croissante de $\underline{u}_\varepsilon$, solution minimale de (III-1).

Alors l'ensemble $\{x \in \Omega / \underline{u}(x) = \psi\}$ est de mesure non nulle. Le résultat est a fortiori vrai si on remplace \underline{u} par \bar{u} , limite croissante de la solution maximale \bar{u}_ε de (III-1).

Preuve: on raisonne comme dans la Proposition V-1; on a $\underline{u} = \lim \underline{u}_\varepsilon \leq \psi$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible et p.p. (après extraction). Supposant $\underline{u} < \psi$ p.p. on passe à la limite dans (III-1) pour voir que $\underline{u} \leq \psi$ est solution de (III-0) ce qui contredit (i) et (ii) ■

Dans ce cas, les limites \underline{u} , \bar{u} des solutions minimale et maximale constituent, relativement à $\psi - \underline{u}$ et $\psi - \bar{u}$, un problème à frontière libre.

On a en fait le résultat fondamental suivant :

Proposition V-2 : soit u_ε une solution quelconque de (III-1). Il existe au moins une valeur d'adhérence dans la topologie $H_0^1(\Omega)$ faible lorsque $\varepsilon \searrow 0$. Toute valeur d'adhérence u vérifie l'inéquation variationnelle :

$$(V-1) \quad \begin{cases} a(u, w-u) \geq \lambda(f(u), w-u) & \forall w \in K \\ K = \{ w \in H_0^1(\Omega) / w \leq \psi \text{ p.p.} \} \\ \text{avec } u \in K \end{cases}$$

En particulier, $\underline{u}_\varepsilon$ et \overline{u}_ε convergent vers \underline{u} , resp. \overline{u} , solution de (V-1) (sans extraction).

Les convergences ci-dessus ont lieu également dans $H_0^1(\Omega)$ fort.

Preuve : Considérons la formulation faible (III-1) :

$$\begin{cases} a(u_\varepsilon, v) = \left(\frac{\psi - u_\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - u_\varepsilon|} f(u_\varepsilon), v \right) & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

En prenant $v = u_\varepsilon$ et en utilisant le fait que $0 \leq u_\varepsilon \leq \psi$ on obtient l'estimation :

$$\alpha \|u_\varepsilon\|^2 \leq a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq \lambda \|f(\psi)\|_\infty |u_\varepsilon|$$

donc $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \geq 0}$ est dans un borné de $H_0^1(\Omega)$ et, après éventuellement extraction (d'une suite), $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible et presque partout.

Mais si $u_\varepsilon(x) \rightarrow \psi(x)$ on ne peut pas passer à la limite dans (III-1)!

Soit $w \in H^1(\Omega)$, $w \geq 0$ p.p. sur Ω et $w = \psi$ sur $\partial\Omega$. On choisit

$v = w - (\psi - u_\varepsilon)$ dans (III-1) :

$$\begin{aligned} a(u_\varepsilon, w - \psi) + a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) &= \lambda \left(f(u_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - u_\varepsilon|} f(u_\varepsilon), w - (\psi - u_\varepsilon) \right) \\ &= \lambda(f(u_\varepsilon), w - (\psi - u_\varepsilon)) - \varepsilon \left(\frac{f(u_\varepsilon)}{\varepsilon + |\psi - u_\varepsilon|}, w \right) + \lambda \varepsilon \left(\frac{\psi - u_\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - u_\varepsilon|}, f(u_\varepsilon) \right) \\ &\leq \lambda(f(u_\varepsilon), w - (\psi - u_\varepsilon)) + \lambda \varepsilon \left(\frac{\psi - u_\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - u_\varepsilon|}, f(u_\varepsilon) \right) \end{aligned}$$

Examinons le membre de droite lorsque ε tend vers 0 :

le premier terme tend vers $\lambda(f(u), w - (\psi - u))$ par le théorème de convergence dominée; le deuxième est majoré en valeur absolue par $\lambda \varepsilon |f(\psi)|_{\infty} \text{mes}(\Omega)$, il tend vers 0.

En ce qui concerne le membre de gauche :

$$a(u_{\varepsilon}, w - \psi) \longrightarrow a(u, w - \psi)$$

$$\text{et } \lim_{u_{\varepsilon} \rightarrow u} \inf a(u_{\varepsilon}, u_{\varepsilon}) \geq a(u, u)$$

puisque $u \rightarrow a(u, u)$ est faiblement s.c.i. sur $H_0^1(\Omega)$.

D'où en prenant la limite inférieure de l'inégalité ci-dessus :

$$a(u, w - \psi) + \liminf a(u_{\varepsilon}, u_{\varepsilon}) \leq \lambda(f(u), w - (\psi - u))$$

$$a(u, w - \psi) - a(u, u) \leq \lambda(f(u), w - (\psi - u))$$

$$a(u, w - \psi + u) \leq \lambda(f(u), w - \psi + u)$$

pour tout $w \in H^1$, $w \geq 0$, $w = \psi$ sur $\partial\Omega$

d'où en posant $v = \psi - w$, $v \in H_0^1(\Omega)$ $v \leq \psi$:

$$a(u, u - v) \leq \lambda(f(u), u - v) \quad \forall v \in K \text{ ou encore}$$

$$a(u, v - u) \geq \lambda(f(u), v - u) \quad \forall v \in K$$

(et $u \in K$ puisque $u = \lim \text{p.p. } u_{\varepsilon} : 0 \leq u_{\varepsilon}(x) \leq \psi(x)$).

Pour la convergence forte dans $H_0^1(\Omega)$, on écrit les formulations faibles

(III-1) et (V-1) :

$$a(u_{\varepsilon}, v) = \lambda \left(\frac{\psi - u_{\varepsilon}}{\varepsilon + |\psi - u_{\varepsilon}|} f(u_{\varepsilon}), v \right) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$a(u, w - u) \geq \lambda(f(u), w - u) \quad \forall w \in K$$

on choisit $v = u - u_\varepsilon$, $w = u_\varepsilon \in K$ et on somme :

$$a(u - u_\varepsilon, u_\varepsilon - u) \geq \lambda(f(u) - \frac{\psi - u_\varepsilon}{\varepsilon + |\psi - u_\varepsilon|} f(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u)$$

$$\alpha \|u - u_\varepsilon\|^2 \leq a(u - u_\varepsilon, u - u_\varepsilon) \leq 2\lambda |f(\psi)|_\infty |u - u_\varepsilon|$$

d'où le résultat puisque $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ fort ■

Remarque 1 : la convergence de u vers u_ε a lieu dans $W^{2,p}(\Omega)$ faible, donc dans $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$, $\alpha < 1$ (mais pas C^2) :

il suffit de remarquer que $Au_\varepsilon \in$ borné de $L^p(\Omega) \forall p > 1$.

Remarque 2 : l'inéquation (V-1) s'interprète de la manière suivante, puisque $u \in W^{2,p}(\Omega)$:

$$(V-2) \quad \begin{cases} Au \leq \lambda f(u) \text{ p.p. dans } \Omega \\ u \leq \psi \text{ p.p. dans } \Omega \\ (\psi - u)(Au - \lambda f(u)) = 0 \text{ p.p. dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

ou encore si I désigne l'ensemble de coïncidence, qu'on définit de la façon suivante ([59]) :

On pose $\Omega \setminus I = \{x \in \Omega / u(x) < \psi(x) \text{ au sens de } H_0^1(\Omega)\}$. Rappelons ([59]) que $u(x_0) < \psi(x_0)$ au sens de $H_0^1(\Omega)$ ssi. il existe une boule $B(x_0, \rho) \subset \Omega$ et si il existe $\varphi \in \mathcal{D}_+(B(x_0, \rho))$, $\varphi(x_0) > 0$ tels que $\psi - u - \varphi \leq 0$ sur $B(x_0, \rho)$ au sens de $H_0^1(\Omega)$.

Avec ces notations, si u est solution de (V-1) on a

$$Au = \lambda f(u) \text{ sur } \Omega \setminus I, \quad -Au + \lambda f(u) \text{ est en fait une mesure } \geq 0$$

à support dans I et $u = \psi$ sur I . Comme $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ on peut en fait donner une interprétation analogue en définissant l'ensemble $\{u = \psi\}$ au sens ordinaire, si ψ est régulière, en remplaçant u par son représentant continu.

Remarque 3 : interprétation en termes d'équation à non-linéarité discontinue lorsque $\psi \in W^{2,p}(\Omega) \quad \forall p > 1$.

Soit u_ε une solution de (III-1). On a

$$\begin{cases} Au_\varepsilon(x) = \lambda \frac{\psi(x) - u_\varepsilon(x)}{\varepsilon + |\psi(x) - u_\varepsilon(x)|} f(u_\varepsilon(x)) \quad \text{p.p.} \\ u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ u_\varepsilon(x) \leq \psi(x). \end{cases}$$

Soit $u(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} u_\varepsilon(x)$ lorsque $\varepsilon \searrow 0$

Si $u(x) < \psi(x)$ alors, formellement :

$$Au(x) = \lambda f(u(x))$$

Si $u(x) \geq \psi(x)$ alors $Au_\varepsilon(x) \leq \lambda f(u_\varepsilon(x)) \implies Au(x) \leq \lambda f(u(x))$.

Mais pour $u \in W^{2,p}(\Omega)$ on a, sur l'ensemble $\{u(x) = \psi(x)\}$,

$$Au(x) = A\psi(x) \quad \text{p.p.} \quad ([29]).$$

Donc $u(x)$ vérifie :

$$Au(x) = \begin{cases} \lambda f(u(x)) & \text{si } u(x) < \psi(x) \\ \min \{ \lambda f(u(x)), A\psi(x) \} & \text{si } u(x) \geq \psi(x) \end{cases}$$

qui est une formulation équivalente au problème d'obstacle (V-1) en termes d'équation à non-linéarité discontinue ([29, théorème 5-1]).

Remarque 4 : on a donné une méthode d'approximation d'une I.V. de la forme :

$$(V-1) \quad \begin{cases} a(u, v-u) \geq \lambda(f(u), v-u) \\ \forall v \in K; u \in K \end{cases}$$

avec $K = \{w \in H_0^1(\Omega) / w \leq \psi \text{ p.p. sur } \Omega\}$

par une suite d'équations $(\varepsilon_n \searrow 0)$:

$$(III-1) \quad \begin{cases} a(u, v) = \lambda \left(\frac{\psi - u}{\varepsilon_n + |\psi - u|} f(u), v \right) \\ u \in H_0^1(\Omega); \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

lorsque $A\psi \geq 0$. Les exemples traités au § III (en particulier avec $\psi(x) = 1 + |x|$) ont montré que, si $A\psi$ n'est pas ≥ 0 , l'I.V. (V-1) qui a toujours un sens n'est plus nécessairement le problème limite.

VI. ETUDE DE L'I.V. (V-1). APPROXIMATION DES BRANCHES. APPROXIMATION NUMERIQUE.

On va d'abord étudier, du point de vue des branches de solutions, l'I.V. générale :

$$(VI-1) \quad \begin{cases} a(u, w-u) \geq \lambda(f(u), w-u) \\ u \in K, \forall w \in K = \{w \in H_0^1(\Omega) / w \leq \psi \text{ p.p.}\} \end{cases}$$

avec sur a, f, ψ les hypothèses données au § II. On ne suppose pas au départ que $A\psi$ est une mesure ≥ 0 . On démontre immédiatement que toute solution u de (VI-1) est ≥ 0 (on choisit $w = u^+ \in K$ dans (VI-1)).

VI-1. Existence par méthode de monotonie.

On ne suppose pas ici que f est croissante, mais simplement qu'il existe $M \geq 0$ tel que $f'(t) + M \geq 0 \quad \forall t \in [0, |\psi|_\infty]$

(on prendra ensuite $M = 0$ dans les problèmes considérés).

Le problème (VI-1) admet la formulation équivalente :

$$\begin{cases} a(u, w-u) + \lambda M(u, w-u) \geq \lambda(f(u) + Mu, w-u) \\ \forall w \in K; u \in K \end{cases}$$

Soit $K_+ = \{w \in H_0^1(\Omega) \mid 0 \leq w(x) \leq \psi(x) \text{ p.p. sur } \Omega\}$ et S l'opérateur qui à $v \in K_+$ associe $u = Sv$ solution du problème :

$$\begin{cases} a(u, w-u) + \lambda M(u, w-u) \geq \lambda(f(v) + Mv, w-u) \\ \forall w \in K; u \in K \end{cases}$$

L'application $(u, v) \in H_0^1(\Omega)^2 \rightarrow a(u, v) + \lambda M(u, v)$ définit un opérateur monotone de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$, borné et hémicontinu, donc pseudomonotone ([63]) et en fait, aussi coercif :

$$\lim_{\|v\| \rightarrow \infty} \frac{1}{\|v\|} [a(v, v) + \lambda M(v, v)] \geq \alpha \lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} \|v\| = +\infty$$

D'après un résultat de Lions ([63]) $u = Sv$ existe et est unique.

Comme $f(v) + Mv \geq 0$ si $v \in K_+$, on montre comme d'habitude que $u \geq 0$ donc $u \in K_+$.

Lemme : L'application $S : K_+ \rightarrow K_+$ est croissante i.e. $v_1 \leq v_2$ p.p.
 $\implies Sv_1 \leq Sv_2$ p.p.

Preuve : soient v_1 et $v_2 \in K_+$ $v_1(x) \leq v_2(x)$ p.p.

On considère les inéquations donnant u_1 et u_2 :

$$\begin{aligned} a(u_1, w-u_1) + \lambda M(u_1, w-u_1) &\geq \lambda(f(v_1) + Mv_1, w-u_1) \\ a(u_2, w-u_2) + \lambda M(u_2, w-u_2) &\geq \lambda(f(v_2) + Mv_2, w-u_2) \end{aligned}$$

on choisit $w = u_1 - (u_1 - u_2)^+$ dans la première inéquation,
 $w = u_2 + (u_1 - u_2)^+$ dans la deuxième et on fait la somme (on vérifie
 que les w choisis sont dans K) :

$$-a(u_1 - u_2, (u_1 - u_2)^+) - \lambda M(u_1 - u_2, (u_1 - u_2)^+) \geq 0$$

puisque $f(v_2) + Mv_2 \geq f(v_1) + Mv_1$ p.p. grâce au choix de M .

Comme d'habitude, on en déduit que :

$$\|(u_1 - u_2)^+\|^2 \leq 0 \text{ donc } u_1 \leq u_2 \text{ p.p. ce qui suffit } \blacksquare$$

Proposition VI-1 : soit $u^n = s^n(o)$, $0 \leq u^n \leq \psi$ p.p. La suite u^n
 est croissante et converge vers $\underset{\sim}{u}$, solution minimale de (VI-1). La
 suite $v^n = S^n(\psi)$ est décroissante et converge vers $\underset{\sim}{u}$, solution maxi-
 male de (VI-1). Les convergences ont lieu dans $H_0^1(\Omega)$.

Preuve : pour la suite u^n , on sait que $u^1(x) \geq 0 = u^0(x)$ donc par
 récurrence u^n est croissante et bien entendu majorée par $\psi \in L^\infty(\Omega)$. Soit
 $\underset{\sim}{u} = \lim_{n \rightarrow \infty} u^n$. Si on choisit $w = 0$ dans l'équation donnant u^{n+1} on
 obtient :

$$a(u^{n+1}, u^{n+1}) + \lambda M(u^{n+1}, u^{n+1}) \leq \lambda(f(u^n) + Mu^n, u^{n+1}) \leq$$

$$\leq \lambda[f(|\psi|_\infty) + M|\psi|_\infty]u^{n+1}$$

donc u^{n+1} est dans un borné de $H_0^1(\Omega)$ et $u^n \rightarrow \underset{\sim}{u}$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible,
 $L^2(\Omega)$ fort et p.p. ce qui est suffisant pour passer à la limite dans

l'équation en utilisant le fait que $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a(u^{n+1}, u^{n+1}) \geq a(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{u})$:

$$a(u^{n+1}, w - u^{n+1}) + \lambda M(u^{n+1}, w - u^{n+1}) \geq \lambda(f(u^n) + Mu^n, w - u^{n+1})$$

Donc $\underset{\sim}{u}$ est solution de (VI-1).

Soit u une autre solution de (VI-1) : $u \geq 0$ donc $S^n(u) = u \geq S^n(o) = u^n$
 et à la limite $u \geq \underset{\sim}{u}$ ce qui montre que $\underset{\sim}{u}$ est la solution minimale.

Pour avoir la convergence dans $H_0^1(\Omega)$ on écrit les équations donnant u^{n+1} et $\underset{\sim}{u}$:

$$a(u^{n+1}, w - u^{n+1}) + \lambda M(u^{n+1}, w - u^{n+1}) \geq \lambda(f(u^n) + Mu^n, w - u^{n+1})$$

$$a(\underset{\sim}{u}, w - \underset{\sim}{u}) + \lambda M(\underset{\sim}{u}, w - \underset{\sim}{u}) \geq \lambda(f(\underset{\sim}{u}) + M\underset{\sim}{u}, w - \underset{\sim}{u})$$

avec respectivement $w = \underset{\sim}{u}$ et $w = u^{n+1}$ et on fait la somme :

$$a(u - u^{n+1}, \underset{\sim}{u} - u^{n+1}) + \lambda M|u - u^{n+1}|^2 \leq \lambda[(f(\underset{\sim}{u}) + M\underset{\sim}{u} - f(u^{n+1}) - Mu^{n+1}, u - u^{n+1})]$$

le terme de droite tend vers 0 par le théorème de Lebesgue, ce qui, joint à la coercivité de a , donne la convergence de u^{n+1} vers $\underset{\sim}{u}$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Pour la suite v^n , la démonstration est la même, puisque $v^1 \leq \psi = v^0$ p.p. ■

Remarque 1 : l'algorithme de convergence monotone donné ci-dessus est particulièrement simple si $f'(t) \geq 0$, auquel cas $M = 0$.

Remarque 2 : on a en fait de la régularité sur les solutions de (VI-1) lorsque $A\psi$ est une mesure ≥ 0 : toute solution u de (VI-1) est dans $W^{2,p}(\Omega) \forall p \geq 2$ donc dans $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}) \forall \alpha \in (0,1)$.

Preuve : le problème (VI-1) s'écrit de façon équivalente :

$$\begin{cases} a(v, Z-v) \geq (g, Z-v) \\ \forall Z \in \{Z \in H_0^1(\Omega) / Z \geq -\psi\} ; v \in H_0^1(\Omega), v \geq -\psi \end{cases}$$

où on a posé : $u = -v$, $w = -Z$, $g(x) = -\lambda f(u(x)) \in L^p(\Omega)$ pour tout $p \geq 2$ puisque $0 \leq u \leq \psi \in L^\infty(\Omega)$; donc $g \in L^p(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega)$ et par hypothèse, $-\psi \leq 0$, $A(-\psi)$ est une mesure ≤ 0 . On peut alors appliquer le résultat standard de régularité [63 pp. 261] qui donne $u = -v \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$.

La condition $A(-\psi)$ est une mesure et $[A(-\psi)]^+ \in L^p(\Omega)$, évidemment vérifiée dans notre cas, est d'ailleurs suffisante pour avoir la régularité $W^{2,p}(\Omega)$ ([20]) ■

Remarque 3 : de la même façon on démontre que si $A\psi \geq 0$ les suites u^n, v^n sont bornées dans $W^{2,p}(\Omega)$ d'où la convergence de u^n vers \underline{u} , v^n vers \bar{u} dans $W^{2,p}(\Omega)$ faible $\forall p \geq 2$ et $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\alpha \in (0,1)$.

VI-2 Convergence des branches de (III-1) vers les branches de (VI-1)

On considère les solutions minimale $\underline{u}_\varepsilon$ et maximale \bar{u}_ε du problème perturbé, avec la condition $A\psi \geq 0$:

$$(III-1) \quad a(u,v) = \lambda \left(\frac{\psi - u}{\varepsilon + |\psi - u|} f(u), v \right); \quad \forall v \in H_0^1(\Omega); u \in H_0^1(\Omega)$$

$\underline{u}_\varepsilon$ et \bar{u}_ε sont obtenues comme limites, respectivement de $\underline{u}_\varepsilon^n$ et \bar{u}_ε^n

solution de :

$$(IV-1) \quad \begin{cases} a(\underline{u}_\varepsilon^{n+1}, v) = \lambda \frac{\psi - \underline{u}_\varepsilon^{n+1}}{\varepsilon + |\psi - \underline{u}_\varepsilon^{n+1}|} f(\underline{u}_\varepsilon^n), v) & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \underline{u}_\varepsilon^0 = 0 \end{cases}$$

(resp. même équation pour \bar{u}_ε^n , mais avec $\bar{u}_\varepsilon^0 = \psi$)

On a vu (proposition V-1) que $\underline{u}_\varepsilon$ (\bar{u}_ε) convergent p.p. en croissant et dans $H_0^1(\Omega)$ fort vers \underline{u} (resp. \bar{u}) solution de l'I.V. :

$$(VI-1) \quad \begin{cases} a(u, v-u) \geq \lambda(f(u), v-u); & u \in K \\ \forall v \in K = \{v \in H_0^1(\Omega) / v \leq \psi \text{ p.p. sur } \Omega\} \end{cases}$$

D'autre part, on vient de voir (proposition VI-1) que (VI-1) admettait une solution minimale \underline{u} et une solution maximale \bar{u} , obtenues comme limites, respectivement, des suites \underline{u}^n et \bar{u}^n (p.p. et dans $H_0^1(\Omega)$) définies par le processus suivant ($M = 0$ avec la formulation adoptée au § VI-1) :

$$(VI-2) \begin{cases} a(\underline{u}^{n+1}, v - \underline{u}^{n+1}) \geq \lambda(f(\underline{u}^n), v - \underline{u}^{n+1}) \quad \forall v \in K; \underline{u}^{n+1} \in K \\ \underline{u}^0 = 0 \end{cases}$$

(resp. même équation pour \bar{u}^n mais avec $\bar{u}^0 = \psi$)

La question est la suivante : quel est le lien entre (\underline{u}, \bar{u}) et (\underline{u}, \bar{u}) ?

Proposition VI-2 : on a $\underline{u} = \underline{u}$ et $\bar{u} \leq \bar{u}$; en particulier, on a la convergence (monotone et dans $H_0^1(\Omega)$) de la branche de solutions minimales de (III-1) vers la branche de solutions minimales de l'I.V. (VI-1).

La situation est schématisée sur la figure 3 ci-après.

Preuve : si on montre que $\underline{u}_\varepsilon^n \leq \underline{u}^n$ on aura, en passant à la limite sur n :

$\underline{u}_\varepsilon \leq \underline{u}$ donc $\underline{u} \geq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \underline{u}_\varepsilon = \underline{u}$. Comme \underline{u} est solution de (VI-1) et que \underline{u} est la solution minimale, on aura $\underline{u} = \underline{u}$.

Pour démontrer que $\underline{u}_\varepsilon^n \leq \underline{u}^n$ on procède par récurrence : $\underline{u}_\varepsilon^0 = \underline{u}^0 = 0$; supposons le résultat vrai pour n et écrivons les équations donnant $\underline{u}_\varepsilon^{n+1}$ et \underline{u}^{n+1} :

$$a(\underline{u}_\varepsilon^{n+1}, v) = \lambda \left(\frac{\psi - \underline{u}_\varepsilon^{n+1}}{\varepsilon + |\psi - \underline{u}_\varepsilon^n|} f(\underline{u}_\varepsilon^n), v \right) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$a(\underline{u}_\varepsilon^{n+1}, w - \underline{u}_\varepsilon^{n+1}) \geq \lambda(f(\underline{u}_\varepsilon^n), w - \underline{u}_\varepsilon^{n+1}) \quad \forall w \in K$$

On choisit $v = \underline{u}_\varepsilon^{n+1} - w, w \in K$ dans la première équation et on fait la

somme des deux relations:

$$a(u_{\tilde{u}}^{n+1} - \underline{u}_{\varepsilon}^{n+1}, w - u_{\tilde{u}}^{n+1}) \geq \lambda(\rho(x), w - u_{\tilde{u}}^{n+1}) \quad \forall w \in K$$

avec $\rho(x) = f(u_{\tilde{u}}^n) - \frac{\psi - \underline{u}_{\varepsilon}^{n+1}}{\varepsilon + |\psi - \underline{u}_{\varepsilon}^n|} f(\underline{u}_{\varepsilon}^n)$

Comme $\underline{u}_{\varepsilon}^n \leq \underline{u}_{\varepsilon}^{n+1}$ on a $\rho(x) \geq f(u_{\tilde{u}}^n) - \frac{\psi - \underline{u}_{\varepsilon}^n}{\varepsilon + |\psi - \underline{u}_{\varepsilon}^n|} f(\underline{u}_{\varepsilon}^n)$

$$\geq f(u_{\tilde{u}}^n) - f(\underline{u}_{\varepsilon}^n) \geq 0 \quad \text{par récurrence.}$$

Il suffit alors de choisir $w = u_{\tilde{u}}^{n+1} + (u_{\tilde{u}}^{n+1} - \underline{u}_{\varepsilon}^{n+1})^- \in K$ pour montrer comme d'habitude que $u_{\tilde{u}}^{n+1} \geq \underline{u}_{\varepsilon}^{n+1}$. La relation $\bar{u} \leq \tilde{u}$ est évidente: \bar{u} est une solution de (VI-1) et \tilde{u} en est la solution maximale ■

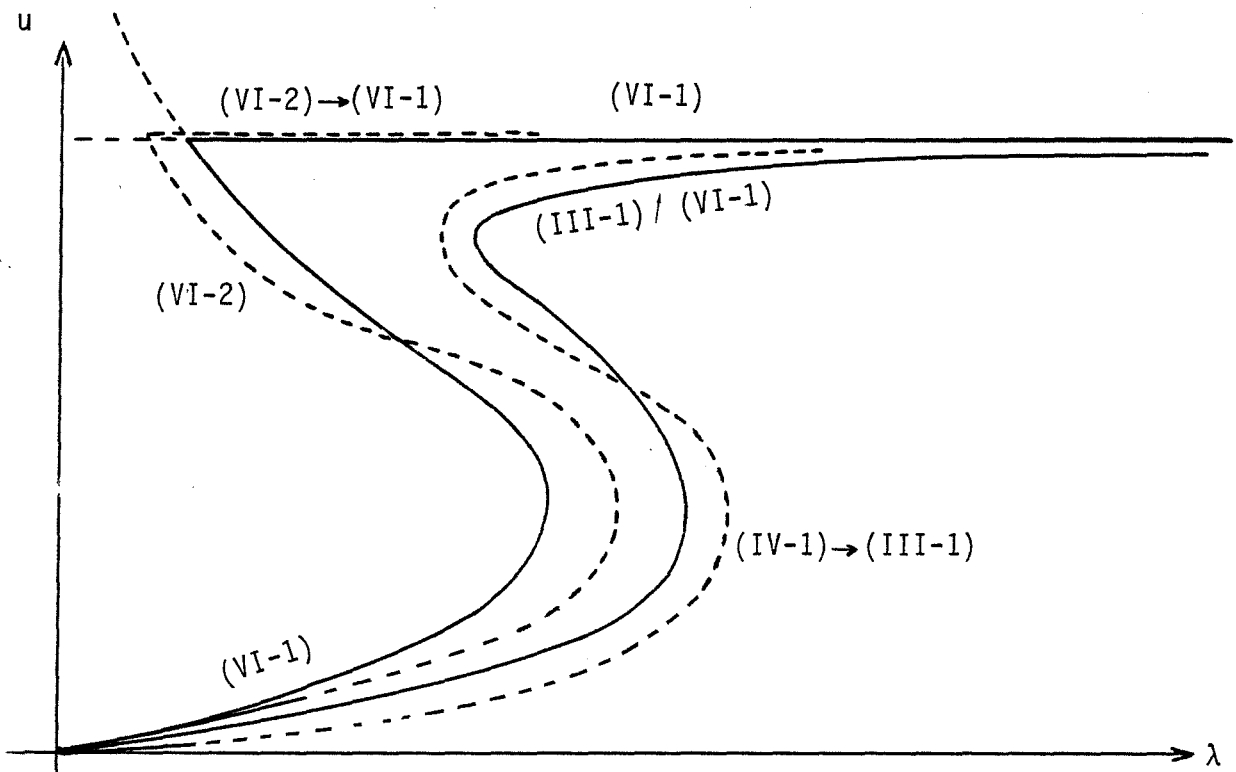


Figure 3 : schématisation des convergences lorsque $\varepsilon \searrow 0$ et $n \rightarrow \infty$.

Remarque: on ne sait rien a priori des positions relatives des branches minimales de (III-1) et (VI-2). D'autre part, les Figures 11-12-13 à la fin de ce chapitre montrent qu'on peut avoir $\bar{u} < \tilde{u}$ (au premier point de retournement sur la branche inéquation en partant de $\lambda = +\infty$).

VI-3. Un schéma numérique d'approximation ($A\psi \geq 0$)

En ce qui concerne l'approximation numérique de l'I.V. (VI-1), on peut adapter la méthode proposée en [19]. Elle consiste à linéariser le problème perturbé (III-1) en introduisant un "retard" et à prendre $\varepsilon = 0$!

Proposition VI-3 : Partant de $u_0 \equiv 0 < \psi$ p.p. sur Ω , supposons construits u_1, \dots, u_K tels que $0 < u_1 \dots < u_K < \psi$, $u_i \in H_0^1(\Omega)$. On définit $u_{K+1} \in H_0^1(\Omega)$ solution de :

$$a(u_{K+1}, w) = \lambda \left(\frac{\psi - u_{K+1}}{\psi - u_K} f(u_K), w \right) \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

Alors $u_K \leq u_{K+1} < \psi$

Preuve : on raisonne d'abord pour $K = 0$; on introduit, pour $\eta > 0$ la solution u_1^η du problème (*) :

$$\begin{cases} a(u_1^\eta, w) = \lambda \left(\frac{\psi - u_1^\eta}{\eta + \psi} f(0), w \right) & \forall w \in H_0^1(\Omega) \\ u_1^\eta \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

De la relation :

$$a(u_1^\eta - \psi, w) + \lambda \left(\frac{u_1^\eta - \psi}{\eta + \psi} f(0), w \right) = a(-\psi, w)$$

on déduit par un principe de maximum fort pour les fonctions de $H^1(\Omega)$, que $u_1^\eta < \psi$, puis que $u_1^\eta > 0$ p.p.

(*) L'introduction du nombre η permet de donner un sens aux équations définissant u_{K+1} , pour tout $K > 0$.

Comme $0 \leq \frac{\psi - u_1^\eta}{\eta + \psi} \leq 1$ la famille u_1^η est bornée dans $W^{2,p}(\Omega)$
 $\forall p \geq 2$ et lorsque $\eta \searrow 0$ u_1^η converge vers u_1 ; on vérifie aisément, en
 appliquant le théorème de Lebesgue au terme $\left(\frac{\psi - u_1^\eta}{\eta + \psi} f(0), w \right)$ que u_1
 est l'unique solution du problème :

$$a(u_1, w) = \lambda \left(\frac{\psi - u_1}{\psi} f(0), w \right) \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

Un calcul élémentaire (avec principe du maximum) montre que si $\eta < \eta'$
 alors $u_1^\eta \geq u_1^{\eta'}$ donc $u_0 = 0 < u_1^\eta < u_1 \leq \psi$ et par une nouvelle applica-
 tion du principe du maximum fort, $u_1 < \psi$ p.p. ce qui termine la preuve
 pour $K = 0$.

Supposons le résultat vrai pour K et introduisons u_{K+1}^η solution de :

$$a(u_{K+1}^\eta, w) = \lambda \left(\frac{\psi - u_{K+1}^\eta}{\eta + \psi - u_K} f(u_K), w \right) \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

Comme ci-dessus, on montre que $0 < u_{K+1}^\eta < \psi$ et que u_{K+1}^η / u_{K+1} solution
 de $a(u_{K+1}, w) = \lambda \left(\frac{\psi - u_{K+1}}{\psi - u_K} f(u_K), w \right)$ lorsque $\eta \searrow 0$. On a $0 < u_{K+1} \leq \psi$
 et par le principe du maximum fort $u_{K+1} < \psi$.

Le seul point restant à prouver est la croissance de la suite u_K . On montre
 pour cela que $u_{K+1}^\eta \geq u_K^\eta$ en faisant la différence des équations donnant
 u_{K+1}^η et u_K^η :

$$\begin{aligned} a(u_{K+1}^\eta - u_K^\eta, w) + \lambda \left(\frac{u_{K+1}^\eta - u_K^\eta}{\eta + \psi - u_K} f(u_K), w \right) &= \\ &= \lambda \left((\psi - u_K^\eta) \left(\frac{f(u_K)}{\eta + \psi - u_K} - \frac{f(u_{K-1})}{\eta + \psi - u_{K-1}} \right), w \right) \geq 0 \end{aligned}$$

car $t \rightarrow \frac{f(t)}{\eta + \psi - t}$ est croissante. Donc $u_{K+1}^\eta \geq u_K^\eta$ p.p. ■

Proposition VI-4 : On a $\lim_{K \rightarrow \infty} u_K = \underline{u}$ p.p. et dans $H_0^1(\Omega)$ faible

et \underline{u} est la solution minimale de l'I.V. (V-1).

Preuve : la suite u_K étant croissante et majorée par ψ , soit \underline{u} sa limite ponctuelle croissante.

Puisque $0 < \frac{\psi - u_{K+1}}{\psi - u_K} \leq 1$, l'équation donnant u_{K+1} montre que u_K est borné dans $H_0^1(\Omega)$ et même dans $W^{2,p}(\Omega)$ donc $u_K \rightarrow \underline{u}$ dans $H_0^1(\Omega)$ fort par exemple.

Ecrivant alors l'équation donnant u_{K+1} avec $w = v - u_{K+1}$, $v \in K$:

$$\begin{aligned} a(u_{K+1}, v - u_{K+1}) &= \lambda \left(\frac{\psi - u_{K+1}}{\psi - u_K} f(u_K), v - u_{K+1} \right) \\ &= \lambda (f(u_K), v - u_{K+1}) + \lambda \left(\frac{u_K - u_{K+1}}{\psi - u_K} f(u_K), v - u_{K+1} \right) \\ &= \lambda (f(u_K), v - u_{K+1}) + \lambda \left(\frac{u_K - u_{K+1}}{\psi - u_K} f(u_K), \psi - u_{K+1} \right) \\ &\quad - \lambda \left(\frac{u_K - u_{K+1}}{\psi - u_K} f(u_K), \psi - v \right) \end{aligned}$$

Puisque $u_K \leq u_{K+1}$, le dernier terme est $\leq 0 \implies$

$$a(u_{K+1}, v - u_{K+1}) \geq \lambda (f(u_K), v - u_{K+1}) + \lambda \left(\frac{u_K - u_{K+1}}{\psi - u_K} f(u_K), \psi - u_{K+1} \right)$$

$$\text{On a également : } \left| \frac{\psi - u_{K+1}}{\psi - u_K} (u_K - u_{K+1}) f(u_K) \right| \leq |u_K - u_{K+1}| f(u_K)$$

car u_K est croissante et comme $u_{K+1} - u_K \rightarrow 0$ p.p., on peut appliquer

le théorème de Lebesgue à $(u_K - u_{K+1}) f(u_K)$ pour en déduire que

$\left(\frac{u_K - u_{K+1}}{\psi - u_K} f(u_K), \psi - u_{K+1} \right)$ tend vers 0. Le passage à la limite dans les

deux termes restants ne pose pas de problème et on obtient :

$$a(\underline{u}, v - \underline{u}) \geq \lambda(f(\underline{u}), v - \underline{u}) \quad \forall v \in K$$

et $\underline{u} \leq \psi$ i.e. $\underline{u} \in K$.

Montrons pour terminer que \underline{u} est bien la solution minimale de l'I.V. (V-1).

Soit u^K (avec $u^0 = 0$) la suite définie par le schéma de monotonie du § (V-1):

$$a(u^{K+1}, v - u^{K+1}) \geq \lambda(f(u^K), v - u^{K+1}) \quad \forall v \in K$$

et u_K la suite définie par la proposition VI-3 :

$$a(u_{K+1}, w) = \lambda(F(u_K) \frac{\psi - u_{K+1}}{\psi - u_K}, w) \quad \forall w \in K$$

on prend $v = u^{K+1} + (u^{K+1} - u_{K+1})^- \in K$ et $w = (u^{K+1} - u_{K+1})^-$

et on fait la différence des deux inéquations :

$$\begin{aligned} -a((u^{K+1} - u_{K+1})^-, (u^{K+1} - u_{K+1})^-) &\geq \lambda(f(u^K) - \frac{\psi - u_{K+1}}{\psi - u_K} f(u_K), (u^{K+1} - u_{K+1})^-) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

car $u^K \geq u_K$ par hypothèse de récurrence et $0 \leq \frac{\psi - u_{K+1}}{\psi - u_K} \leq 1$ (pour $K = 0$ $u^0 = 0 \geq u_0 = 0$) donc $u^{K+1} \geq u_{K+1}$.

Comme u^{K+1} converge vers la solution minimale, on a le résultat par passage à la limite : \underline{u} est la solution minimale ■

VII. EXEMPLE EN GEOMETRIE HYPERSPHERIQUE.

VII-1. Rappel des résultats.

Reprenons le problème modèle en dimension quelconque, avec $f(t) = e^{\frac{t}{1+\delta t}}$. On est dans la situation intéressante mentionnée dans l'introduction : le problème limite formelle ne possède pas de solution pour tout $\lambda \geq 0$ ($\delta = 0$) ou en possède au moins une non majorée par $\psi(\delta > 0)$ pour λ assez grand.

On se limite ici au cas où le domaine Ω est la boule unité de \mathbb{R}^n , avec l'opérateur Laplacien, c'est-à-dire que le problème réduit s'écrit :

$$(VII-1) \left\{ \begin{array}{l} \Delta u + \lambda e^{\frac{u}{1+\delta u}} = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (\delta \text{ est } \geq 0)$$

ou encore, vu que les solutions ≥ 0 sont nécessairement à symétrie radiale ([45])

$$(VII-1) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{d}{dr} \left[r^{n-1} \frac{du}{dr} \right] = \lambda r^{n-1} e^{\frac{u}{1+\delta u}} \quad 0 < r < 1 \\ u'(0) = 0 \quad u(1) = 0 \end{array} \right.$$

Pour $\delta = 0$ le problème a été complètement résolu par JOSEPH et LUNDGREN ([52]) et d'autres auteurs plus anciens en se ramenant à un problème de Cauchy étudié dans le plan de phase.

L'allure des diagrammes de bifurcation est donnée dans la figure 4 a); la valeur $u(0)$ détermine complètement u . Pour le problème (VII-1) avec $\delta > 0$, on a une solution au moins pour tout $\lambda > 0$, on a unicité pour $\lambda > 0$ assez

petit et assez grand (cf. chapitre III), la branche minimale et les branches intermédiaires convergent régulièrement lorsque $\delta \rightarrow 0$, la branche maximale non bornée en u , explose. L'allure est donnée sur la figure 4 a) également. Dans la suite, on prendra $\delta = 0$ qui correspond au problème le mieux étudié.

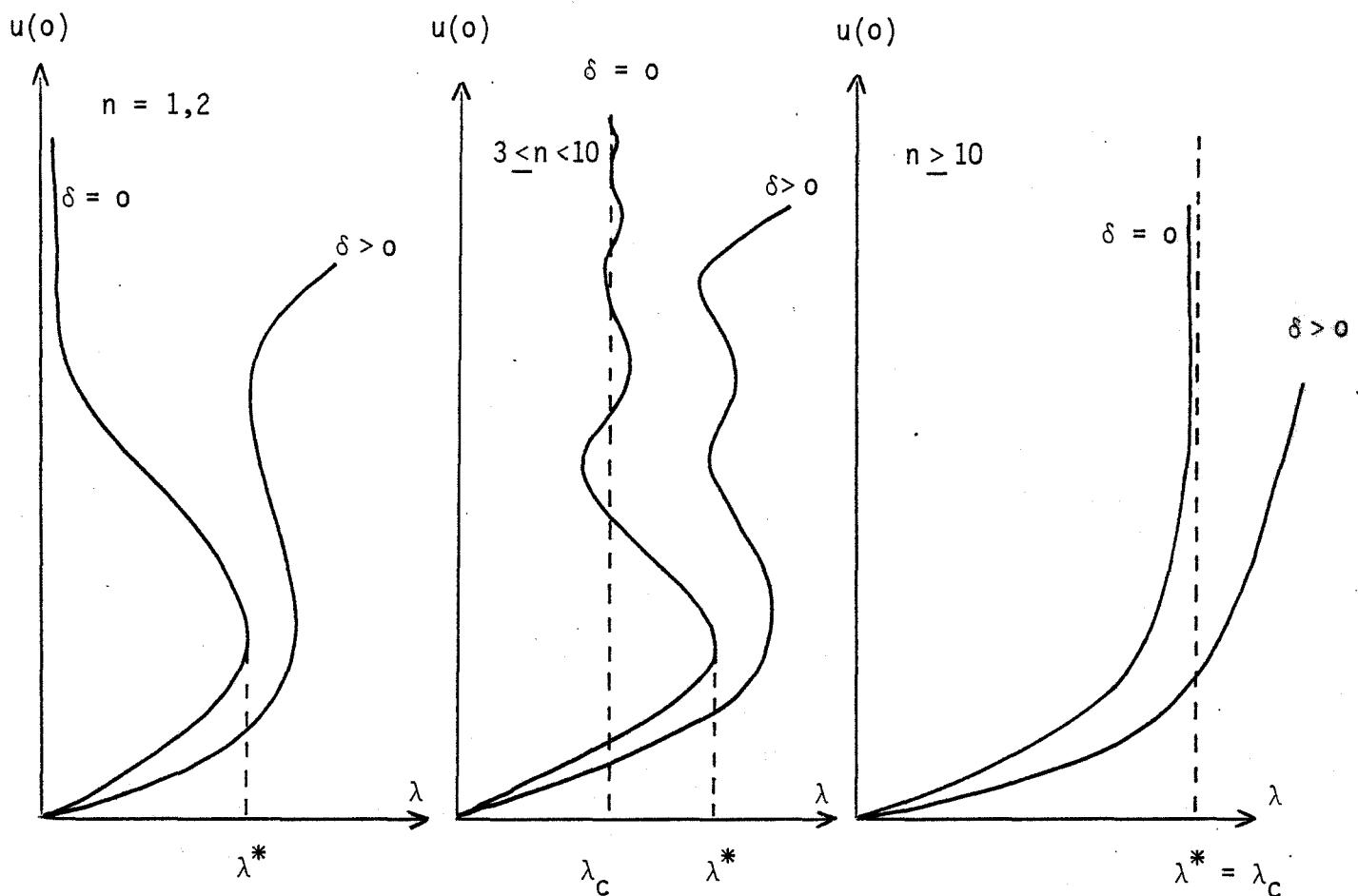


Figure 4 a) : Diagrammes de bifurcation pour le problème (VII-1) selon la dimension n de l'espace.

($\lambda_c = 2(n-2)$ et avec $\lambda = \lambda_c$, $3 \leq n \leq 9$, on a une infinité de solutions pour (VII-1) lorsque $\delta = 0$).

Nous considérons maintenant une perturbation par $\varepsilon > 0$ du problème (VII-1) correspondant à $\delta = 0$, avec un obstacle $\psi \equiv a > 0$:

$$(VII-2) \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda \frac{a - u}{\varepsilon + |a - u|} e^u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

ou encore, les solutions étant toujours à symétrie radiale ([45]) :

$$(VII-2) \quad \begin{cases} \frac{d}{dr} \left[r^{n-1} \frac{du}{dr} \right] + \lambda r^{n-1} \frac{a - u}{\varepsilon + |a - u|} e^u = 0 & 0 < r < 1 \\ u'(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Grâce aux résultats du § IV on peut tracer qualitativement les diagrammes de bifurcation, ce qui est fait sur la figure 4 b) ci-après.

On a aussi représenté le problème limite de (VII-2) lorsque $\varepsilon \searrow 0$ c'est-à-dire l'inéquation :

$$(VII-3) \quad \begin{cases} (\nabla u, \nabla(w-u)) \geq \lambda(e^u, w-u) & u \in K \\ \forall w \in K = \{u \in H_0^1(\Omega) / u \leq a \text{ sur } \Omega\} \end{cases}$$

c'est-à-dire, en interprétant (u est $W^{2,p}(\Omega) \forall p > 1$) :

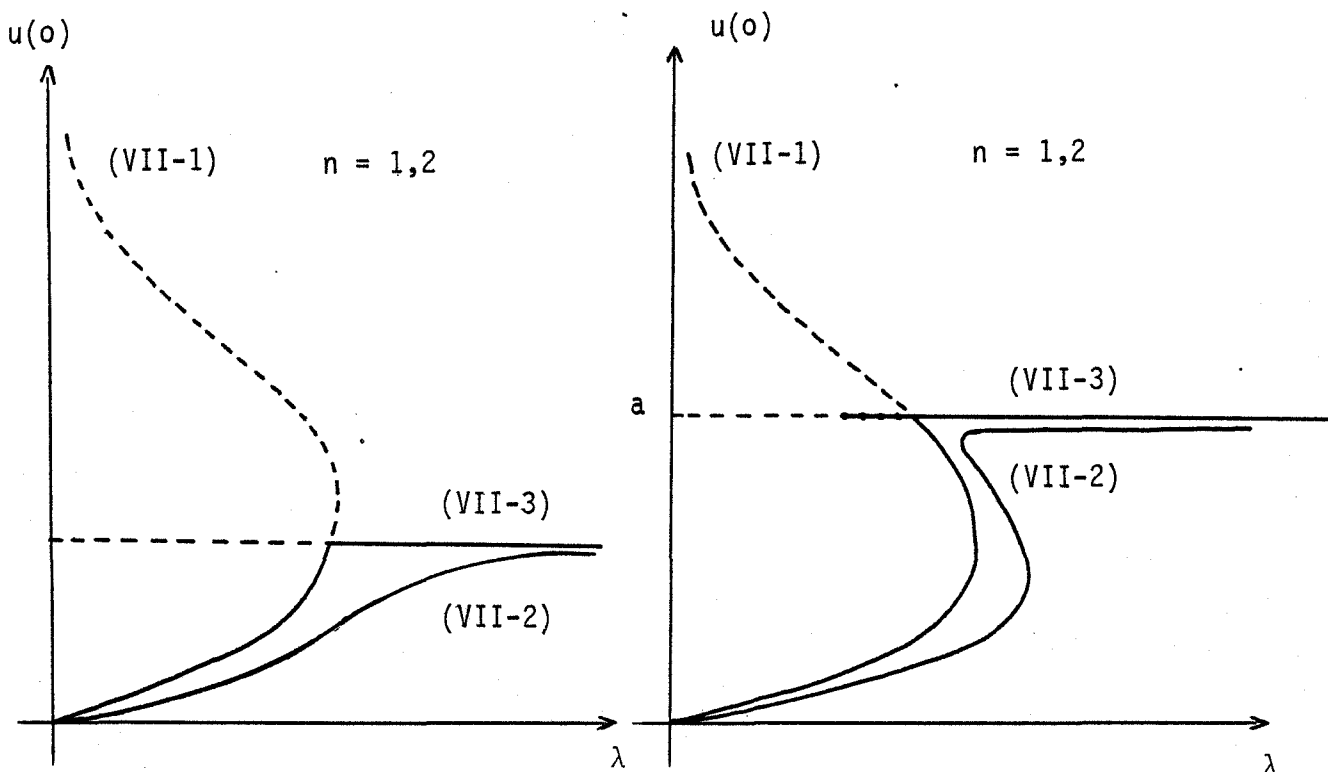
$$(VII-3) \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda e^u \geq 0 \\ u \leq a \\ \Delta u + \lambda e^u = 0 \text{ sur } \{u < a\} \end{cases}$$

ou, puisqu'on s'intéresse aux solutions obtenues par passage à la limite de

solutions symétriques :

$$(VII-3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} u'' + \frac{n-1}{r} u' + \lambda e^u \geq 0 & 0 < r < 1 \\ u \leq a \\ u'' + \frac{n-1}{r} u' + \lambda e^u = 0 & \text{si } u < a \\ u'(0) = u(1) = 0 \end{array} \right.$$

Lorsque $\{u = a\}$ est de mesure non nulle la représentation $(\lambda, u(0))$ est insuffisante pour décrire le comportement des branches de solutions. Nous reviendrons sur ce point.



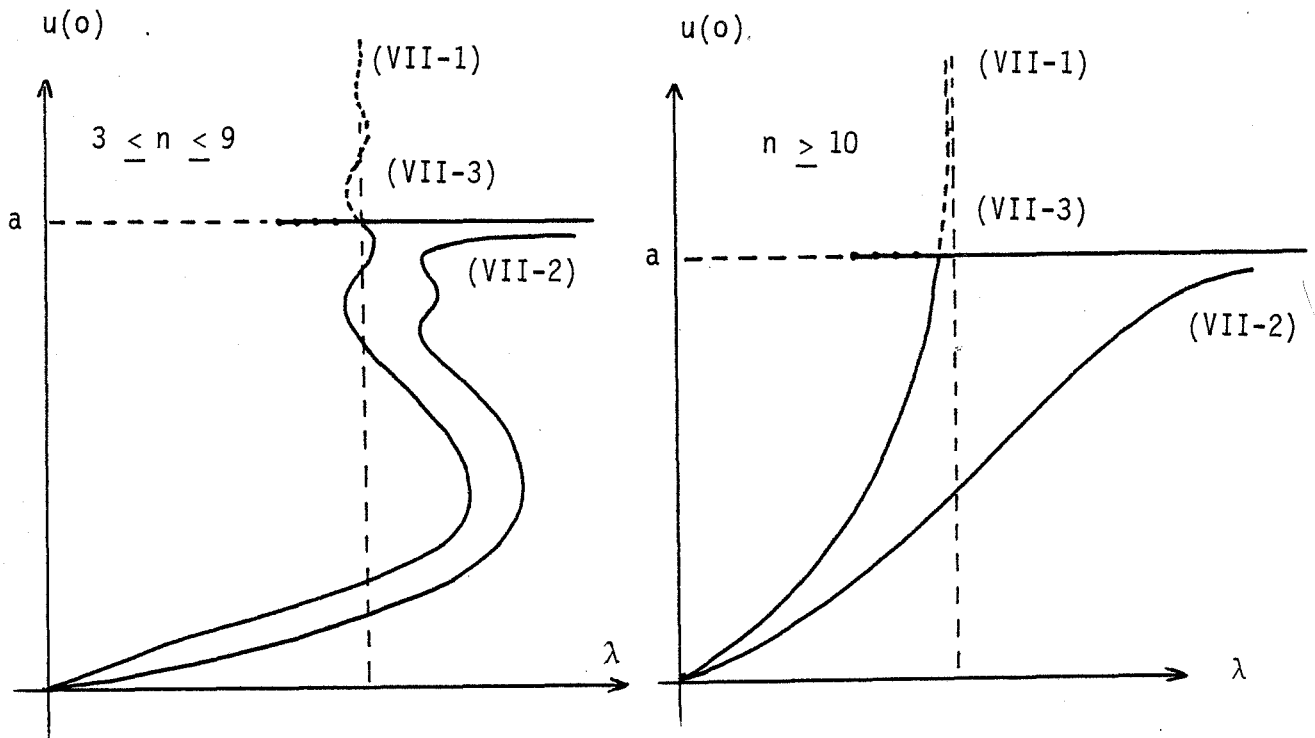


Figure 4 b) : Quelques configurations typiques du problème perturbé lorsque $\varepsilon \searrow 0$ et de l'I.V. limite (— correspond à un retournement de la branche I.V. pure, éventuellement - cf. fig. 9 - 10 - 12 - 13)

VII-2. Méthodes numériques pour le problème perturbé.

Pour déterminer les diagrammes de bifurcation du problème perturbé (VII-2) nous avons utilisé deux méthodes :

1°/ une méthode dite de "tir" où l'on remplace le problème aux limites (VII-2) par un problème à conditions initiales équivalent, résolu numériquement par un algorithme de RUNGE-KUTTA (a priori valable uniquement en symétrie sphérique). Principe :

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$(VII-2)^* \begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r} u' + \frac{a-u}{\varepsilon + |a-u|} e^u = 0 \\ u(0) = \alpha ; u'(0) = 0 \quad \alpha \in [0, a[\end{cases}$$

qui admet une unique solution u , décroissante en r puisque $r^{n-1} \frac{du}{dr}$ est < 0 pour $r > 0$, et en fait $\frac{du}{dr} \leq -\beta < 0$ pour $r \geq \rho_0 > 0$.

Soit x_0 l'unique point tel que $u(x_0) = 0$; alors $w(y) = u(y x_0)$, $y \in [0, 1]$ est solution du problème :

$$\begin{cases} w''(y) + \frac{n-1}{y} w'(y) + x_0^2 \frac{a-w}{\varepsilon + |a-w|} e^w = 0 \\ w'(0) = 0; w(1) = u(x_0) = 0 \end{cases}$$

Autrement dit, à partir de la solution de $(VII-2)^*$ vérifiant $u(0) = \alpha$, on construit une solution de $(VII-2)$ correspondant à $\lambda = x_0$ et $|w|_\infty = w(0) = \alpha$.

Réciproquement, si w est une solution de $(VI-2)$:

$$(VII-2) \begin{cases} w'' + \frac{n-1}{y} w' + \lambda \frac{a-w}{\varepsilon + |a-w|} e^w = 0 \\ w'(0) = 0 \quad w(1) = 0 \end{cases}$$

on sait que $w(0) = \alpha < a$ et, si on pose $u(x) = w\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$, u est la restriction à $[0, \sqrt{\lambda}]$ d'une fonction $v(x)$ vérifiant :

$$\begin{cases} v''(x) + \frac{n-1}{x} v'(x) + \frac{a-v}{\varepsilon + |a-v|} e^v = 0 \\ v(0) = w(0) = \alpha; v'(0) = 0 \end{cases}$$

On obtient par conséquent toutes les solutions de $(VII-2)$ en résolvant le problème de Cauchy $(VII-2)^*$ avec α variant dans $[0, a[$, ce qui donne la

représentation paramétrique $(\lambda, u(0)) = (x_0^2(\alpha), \alpha)$ pour le diagramme de bifurcation.

2°/ une méthode de continuation, valable en géométrie quelconque dont le principe repose sur la méthode de H.B. KELLER ([56]) et qui a été entre autres mise au point dans ([48]) pour les problèmes elliptiques avec points de retournement : nous avons utilisé l'algorithme proposé en [48]. Il se trouve que cette méthode, même en géométrie hypersphérique, est plus efficace que la méthode de tir; de plus, elle rend mieux compte de certains comportements singuliers; nous reviendrons sur ce point lors de l'exposé des résultats numériques.

VII-3. Méthode numérique pour l'I.V. limite :

1°/ En ce qui concerne la branche équation :

$$\begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r} u' + \lambda e^u = 0 \\ u'(0) = u(1) = 0 \quad u < a \end{cases}$$

On opère comme pour le problème perturbé (VII-2) (*) en considérant le problème de Cauchy :

$w'' + \frac{n-1}{\rho} w' + e^w = 0$; $w(0) = \alpha$; $w'(0) = 0$, et en traçant le diagramme $(x_0^2(\alpha), \alpha)$, $\alpha \in [0, a]$, où x_0 est l'unique point tel que $w(x_0) = 0$

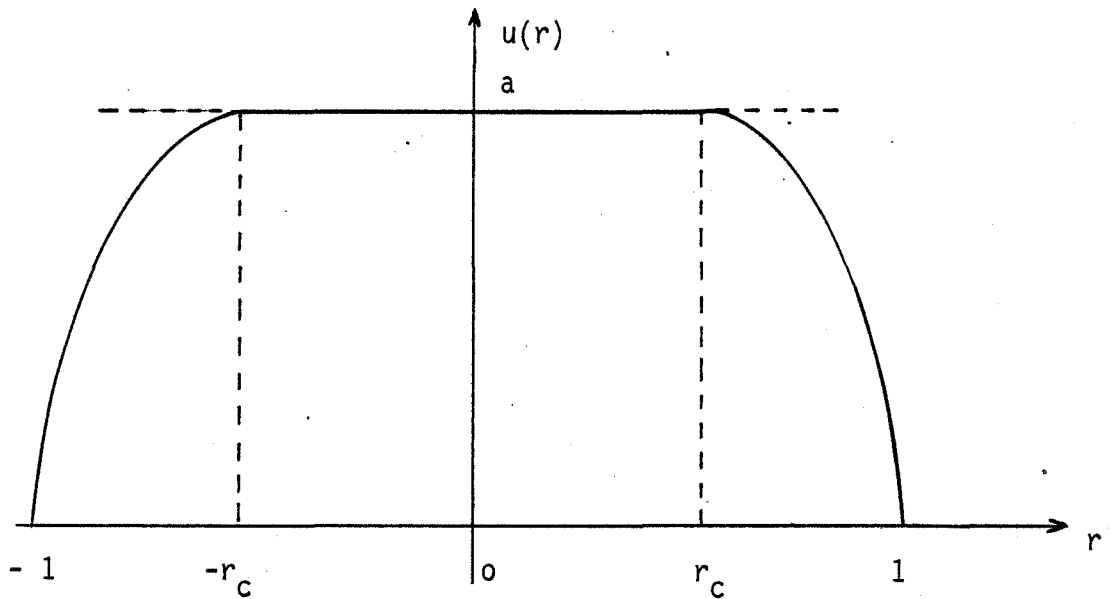
(*) La méthode de tir marche pour toute nonlinéarité, en particulier

$$e^t \quad \text{et} \quad \frac{a-t}{\epsilon + |a-t|} e^t.$$

2°/ En ce qui concerne la branche inéquation, rappelons les formulations équivalentes :

$$(VII-3) \left\{ \begin{array}{l} \Delta u + \lambda e^u \geq 0 \quad (\star) \\ u \leq a; u \in H_0^1(\Omega) \\ (a-u)(\Delta u + \lambda e^u) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dr} \left[r^{n-1} \frac{du}{dr} \right] + \lambda r^{n-1} e^u = 0 \\ \text{si } u < a \\ u'(0) = u(1) = 0 \end{array} \right.$$

ce qui donne une fonction $u(r)$ décroissante de r donc $\{u = a\}$ est un intervalle $[0, r_c]$, $r_c \in [0, 1)$ (cf. fig. ci-dessous) et on a la formulation équivalente (VII-4) ci-après :



$$(VII-4) \left\{ \begin{array}{l} u'' + \frac{n-1}{r} u' + \lambda e^u = 0 \quad r_c < r < 1 \\ u(r_c) = a \quad u'(r_c) = 0 \quad u(1) = 0 \\ 0 \leq r_c < 1 \end{array} \right.$$

(\star) rappelons que $u \in W^{2,p}(\Omega) \subset C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$

où r_c est une inconnue du problème. Dans ce problème nous appellerons diagramme de bifurcation l'ensemble des (λ, r_c) tels que (VII-4) ait une solution. Ce diagramme peut s'obtenir par une modification de la méthode de tir exposée antérieurement.

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(VII-5) \quad \begin{cases} w'' + \frac{n-1}{\rho} w' + e^w = 0 & 0 \leq r_0 \leq \rho < +\infty \\ w(r_0) = a ; w'(r_0) = 0 \end{cases}$$

Soit ρ_0 l'unique point tel que $w(\rho_0) = 0$, on pose alors $r_c = \frac{r_0}{\rho_0}$ et

$$u(x) = \begin{cases} a & \text{pour } 0 \leq x \leq r_c \\ w(x\rho_0) & \text{pour } r_c \leq x \leq 1 \quad (\text{i.e. } w(\rho) = u(\frac{\rho}{\rho_0})) \\ & \text{pour } r_0 \leq \rho \leq \rho_0 \end{cases}$$

La fonction u vérifie, avec $\lambda = \rho_0^2$:

$$\begin{cases} u(x) = a & \text{sur } [0, r_c[\\ u'' + \frac{n-1}{x} u' + \lambda e^u = 0 \\ u(r_c) = a ; u'(r_c) = 0 ; u(1) = w(\rho_0) = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire exactement (VII-4). Réciproquement, on montre que toute solution de (VII-4) donne par la transformation inverse une solution du problème de Cauchy (VII-5). Ainsi, le diagramme de bifurcation (λ, r_c) de la branche inéquation de (VII-3) admet la représentation paramétrique en

$\rho_0 \in [0, +\infty[: (\rho_0^2, \frac{r_0}{\rho_0})$ où $\rho_0 = \rho_0(r_0)$ est le zéro de la fonction $w(r_0, \rho)$, solution de (VII-5).

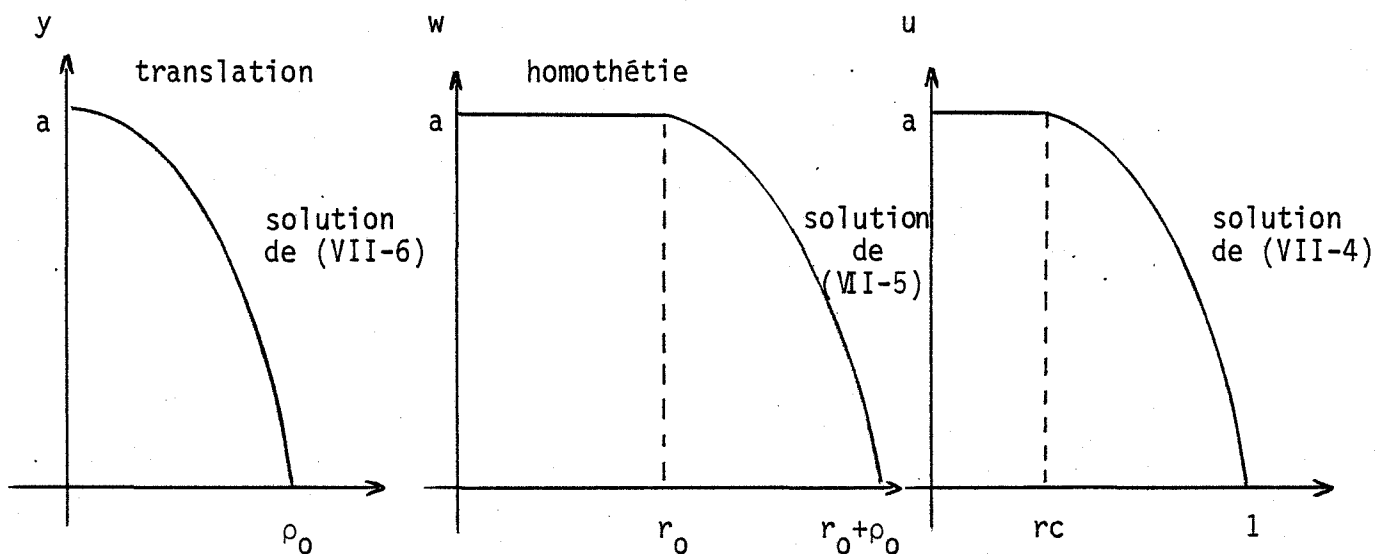
Numériquement, on a résolu (VII-5) par une méthode de RUNGE-KUTTA en faisant varier $r_0 \in [0,1]$. Toutefois en dimension 1, on a une solution analytique complète, grâce à l'invariance par translation du Laplacien ($\frac{n-1}{r} = 0$). Pour une approche analytique en dimension 2, on se reportera à l'annexe II située à la fin de ce travail.

VII-4. Etude analytique en dimension 1.

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(VII-6) \quad \begin{cases} y'' + e^y = 0 \\ y(0) = a; \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

et, modulo une translation de longueur r_0 , on fabrique une solution du problème de Cauchy (VII-5), donc une solution de (VII-4) pour un λ convenable.



Soit ρ_0 l'unique point tel que $y(\rho_0) = 0$. On pose, pour $r_0 \in \mathbb{R}_+$

$$r_c = \frac{r_0}{r_0 + \rho_0} \quad \text{et pour } 0 \leq x \leq 1$$

$$u(x) = a \quad \text{pour } 0 \leq x \leq r_c$$

$$u(x) = y[(x - r_c)(\rho_0 + r_0)] \quad \text{pour } r_c < x < 1$$

Alors, avec $\lambda = (\rho_0 + r_0)^2$ on vérifie que u est solution du problème :

$$(VII-7) \quad \begin{cases} u(x) = a & 0 \leq x \leq r_c < 1 \\ u'' + \lambda e^u = 0 & r_c \leq x \leq 1 \\ u(r_c) = a; u'(r_c) = 0; u(1) = 0 \end{cases}$$

(on prend $y(\rho) = u\left(r_c + \frac{\rho}{r_0 + \rho_0}\right)$ pour $0 \leq \rho \leq \rho_0$, et

on écrit que y vérifie (VII-6)).

Réciproquement, soit (u, λ, r_c) une solution de (VII-7). En posant :

$r_0 = \sqrt{\lambda} r_c$, $\rho_0 = (1 - r_c)\sqrt{\lambda}$, $y(\rho) = u\left(r_c + \frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)$, $0 \leq \rho \leq \rho_0$,
on vérifie que y est solution de :

$$\begin{cases} y'' + e^y = 0 & 0 \leq \rho \leq \rho_0 \\ y(0) = a; y'(0) = 0 & y(\rho_0) = 0 \end{cases}$$

Donc toutes les solutions u de l'I.V. (VII-3) telles que $\{u = a\} \neq \emptyset$ s'obtiennent par le procédé suivant (*):

◇ résoudre (VII-6) jusqu'à trouver ρ_0 tel que $y(\rho_0) = 0$; on a $\rho_0 = \sqrt{\lambda_a}$ où λ_a s'obtient en résolvant le problème réduit :

$$\begin{cases} z'' + \lambda_a e^z = 0 \\ z(0) = a; z'(0) = 0; z(1) = 0 \end{cases}$$

(*) Extensible évidemment à d'autres non linéarités que e^u !

◇ poser $r_c = \frac{r_0}{r_0 + \rho_0}$, $\lambda = (r_0 + \rho_0)^2$

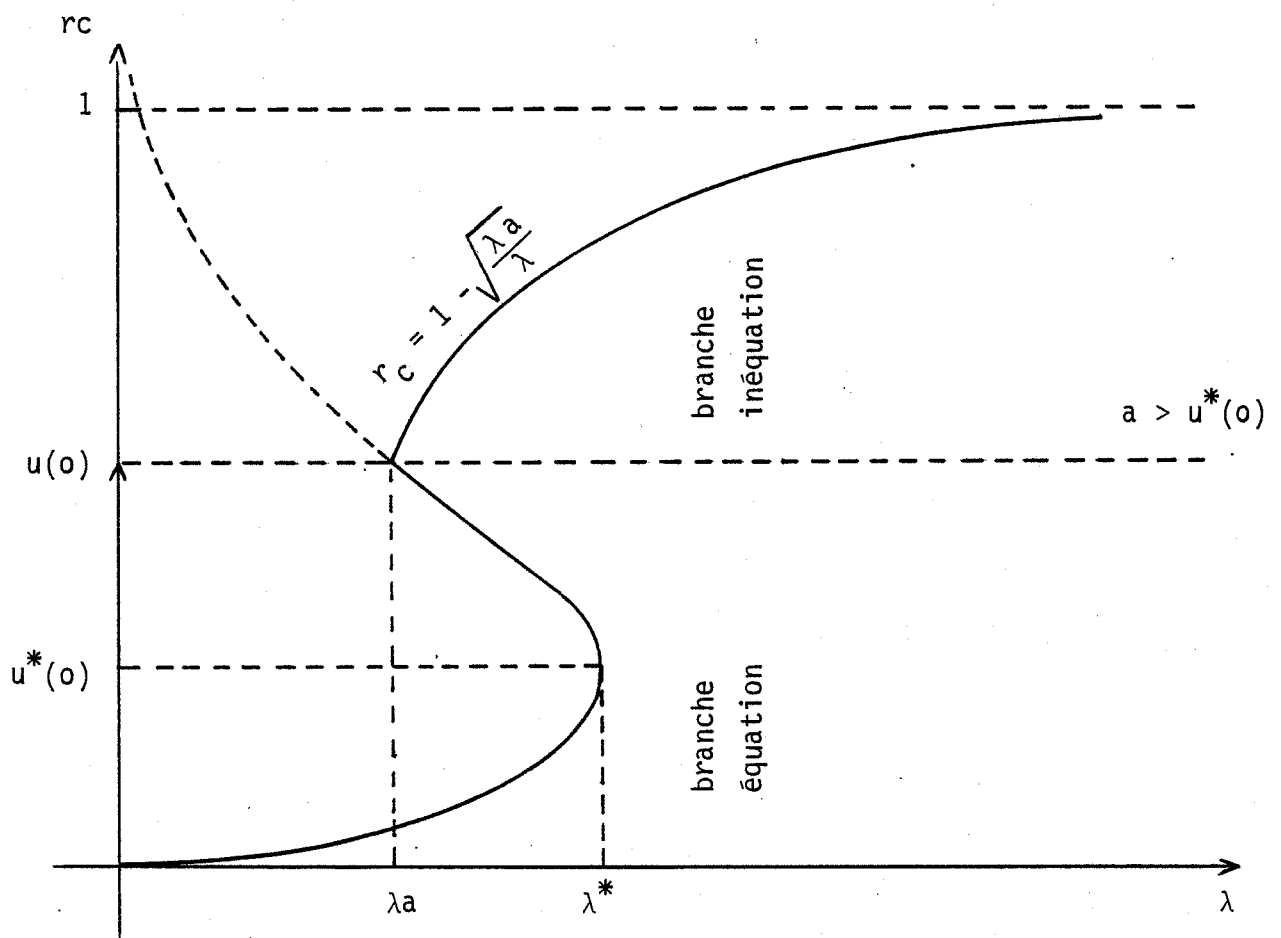
$u(x) = y((x - r_c)(\rho_0 + r_0))$ ce qui permet de tracer le diagramme de bifurcation complet pour la dimension 1, paramétré par $r_0 \in \mathbb{R}_+$:

$(\lambda, r_c) = ((r_0 + \rho_0)^2, \frac{r_0}{r_0 + \rho_0})$ ou, en éliminant r_0 , ce qui est

possible ici car on n'a pas de points de retournement sur la branche

inéquation :

$$r_c = 1 - \sqrt{\frac{\lambda a}{\lambda}} \quad \lambda \geq \lambda_a$$



On notera que $\left(\frac{dr_c}{d\lambda} \right)_{\lambda = \lambda_a} = \frac{1}{2\rho_0^2} = \frac{1}{2\lambda_a} > 0$

et tend vers $+\infty$ lorsque $a \rightarrow +\infty$ et, en fait, lorsque $a \rightarrow +\infty$, le diagramme (λ, r_c) tend, à une translation près vers la fonction de Heaviside $r_c(\lambda) = 1$ si $\lambda > 0$ (cf. annexe I pour le calcul des solutions limites)

Comme on va le voir, la situation devient plus intéressante en dimension > 1 .

5.- RESULTATS NUMERIQUES ET COMMENTAIRES POUR $n > 1$:

Etude de l'I.V. en fonction de la dimension n

(obstacle a fixé, assez grand) : fig. 5-6-7 :

pour $n > 1$ on observe un retournement au moins sur la branche inéquation, parfois deux pour n assez grand.

Etude de l'I.V. en fonction de l'obstacle (n fixé)

fig. 8-9-10 : pour a petit, on n'a pas de retournement sur la branche inéquation, puis (pour $n > 1$), à partir d'un certain seuil, la branche inéquation se retourne au moins une fois. Lorsque $a \rightarrow +\infty$, on note une convergence de la branche (I.V.) des solutions normalisées $\frac{u_a(\lambda)}{a}$ vers des solutions $v(\lambda)$ telles que $v(\lambda) \equiv 1 \quad \forall \lambda > 0$ et $v(\lambda) = v_c$ pour $\lambda < \lambda_c$ où v_c est la limite de la solution normalisée $\frac{u(\lambda, x)}{u(\lambda, 0)}$ de l'équation lorsque $u(\lambda, 0) \rightarrow \infty$ (et $\lambda \rightarrow \lambda_c$, $\lambda_c > 0$ pour $n = 3, \dots, 9$, $\lambda_c = 0$ pour $n = 2$).

Convergence du problème perturbé vers l'inéquation fig.11-14 (*) :

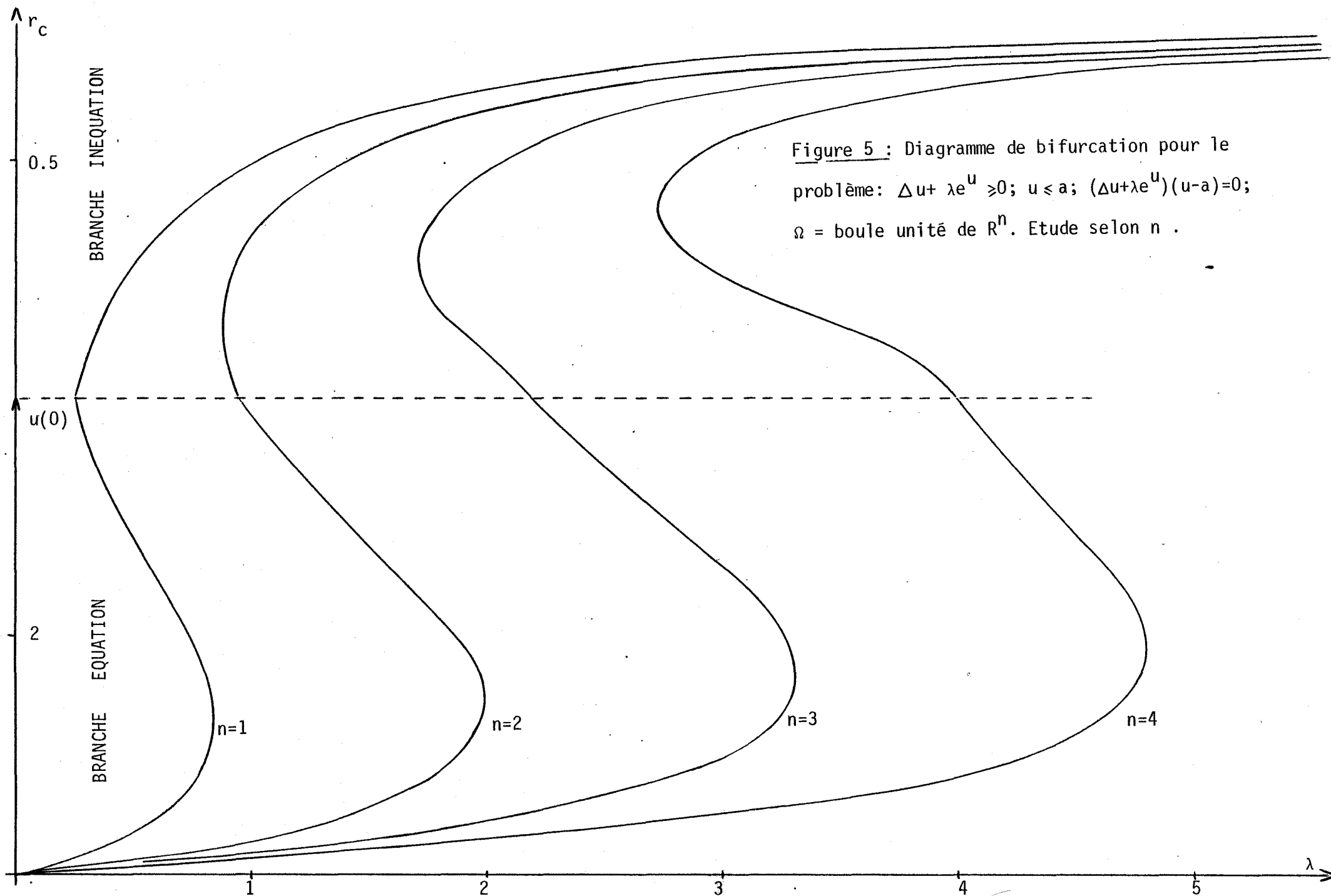
On observe la convergence des branches de solutions du problème perturbé vers les branches de l'(I.V.). Le dernier point de retournement de l'équa-

(*) La méthode de KELLER (continuation) se révèle très utile ici .

tion converge vers le dernier retournement de l'I.V. (les branches perturbées "traversent" la branche équation limite au voisinage de $|u_\varepsilon|_\infty = a$) ce qui semble indiquer que la branche maximale de l'I.V. est stable et qu'au premier point de retournement (partant de $\lambda = +\infty$) il y a échange de stabilité.

Un examen précis du comportement de la branche perturbée au voisinage de a et pour ε petit montre qu'on a des oscillations pour certaines dimensions ($n = 3, 4, \dots$), peut être un nombre arbitrairement grand; on peut donc conjecturer que la branche I.V., allant vers l'équation, oscille (une infinité de fois?) pour certaines dimensions.

CONCLUSION : ces résultats numériques sont à mettre en parallèle avec l'étude du problème de GUELFAND : $\Delta u + \lambda e^u = 0$, $u \in H_0^1(\Omega)$, faite dans [52] en géométrie sphérique et incitent à investir dans l'étude locale des branches de solutions de l'I.V. Le travail fait en [52] suggère aussi de confirmer les résultats numériques ci-dessus par une étude par plan de phase, ce qui n'a pour le moment pas abouti.



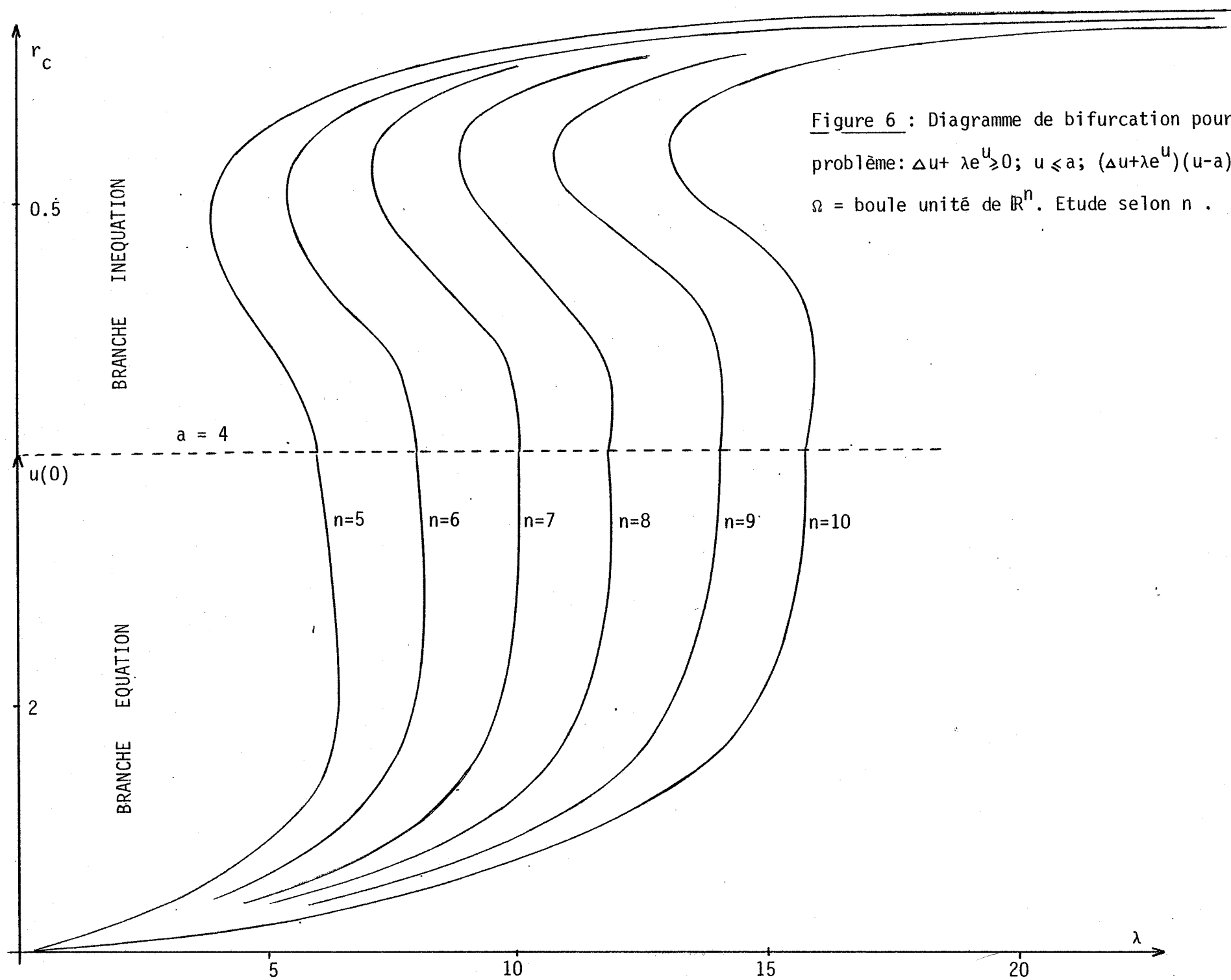


Figure 6 : Diagramme de bifurcation pour le problème: $\Delta u + \lambda e^u \geq 0$; $u \leq a$; $(\Delta u + \lambda e^u)(u-a)=0$; Ω = boule unité de \mathbb{R}^n . Etude selon n .

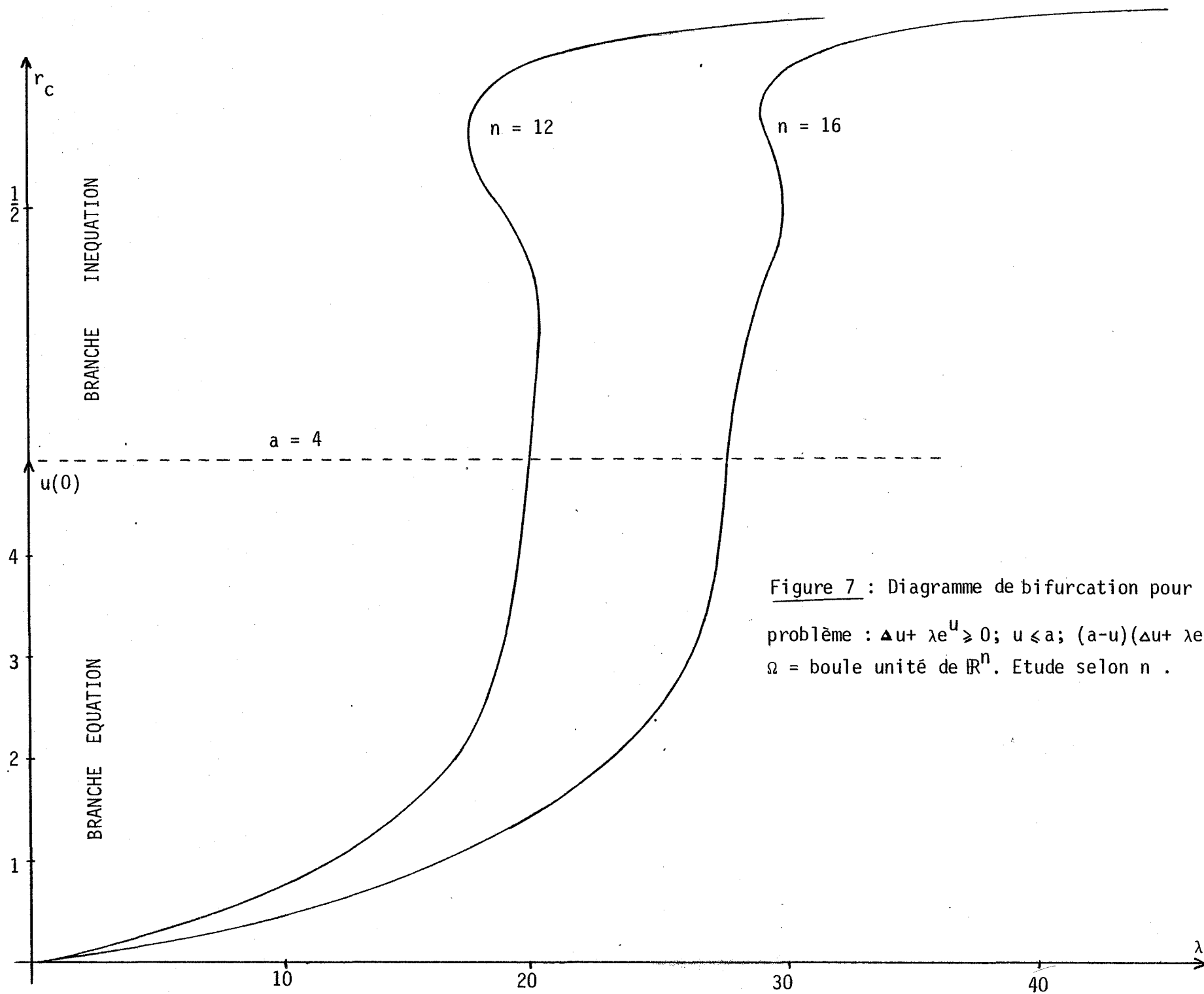
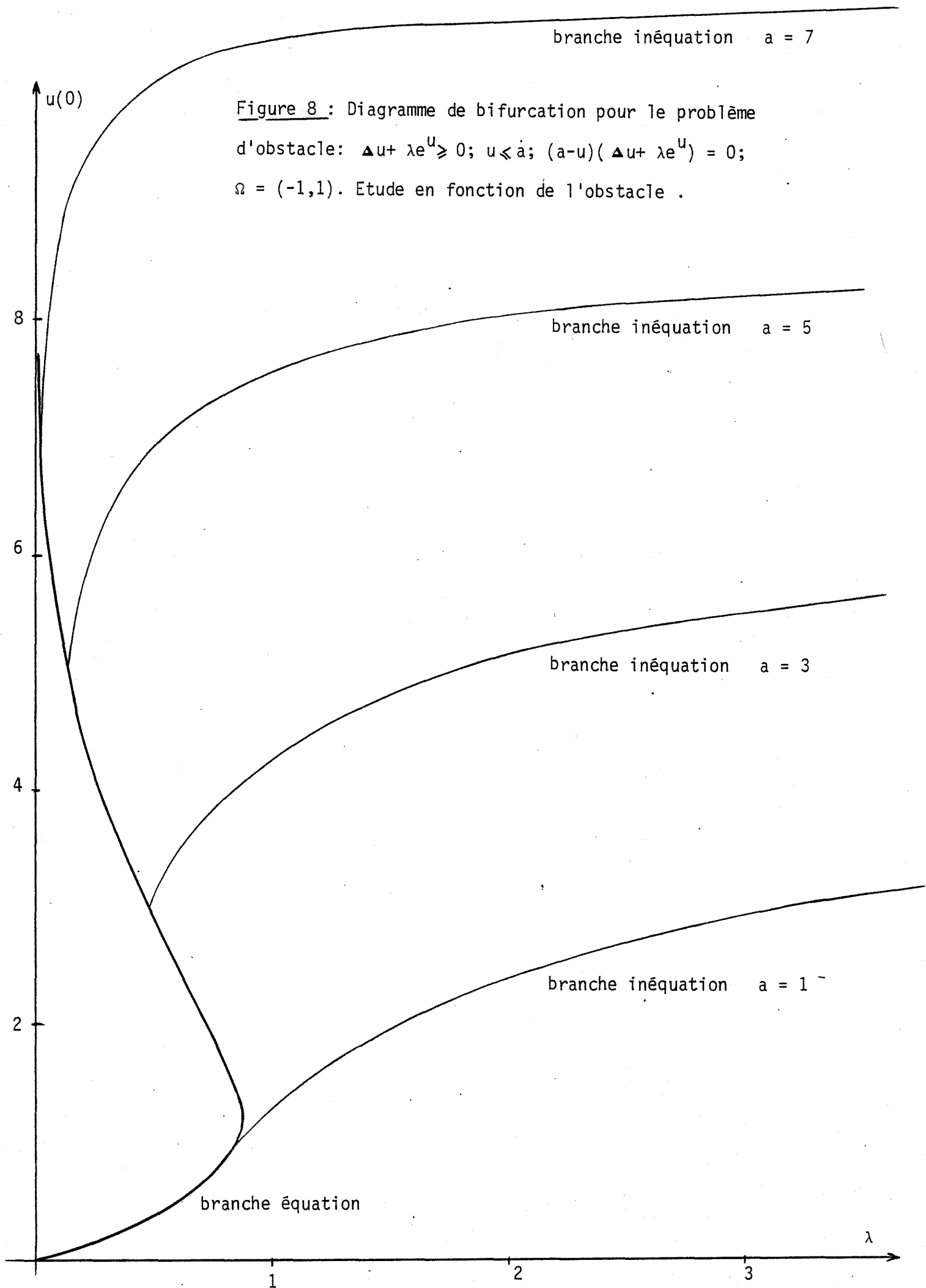


Figure 7 : Diagramme de bifurcation pour le problème : $\Delta u + \lambda e^u \geq 0$; $u \leq a$; $(a-u)(\Delta u + \lambda e^u) = 0$; $\Omega =$ boule unité de \mathbb{R}^n . Etude selon n .



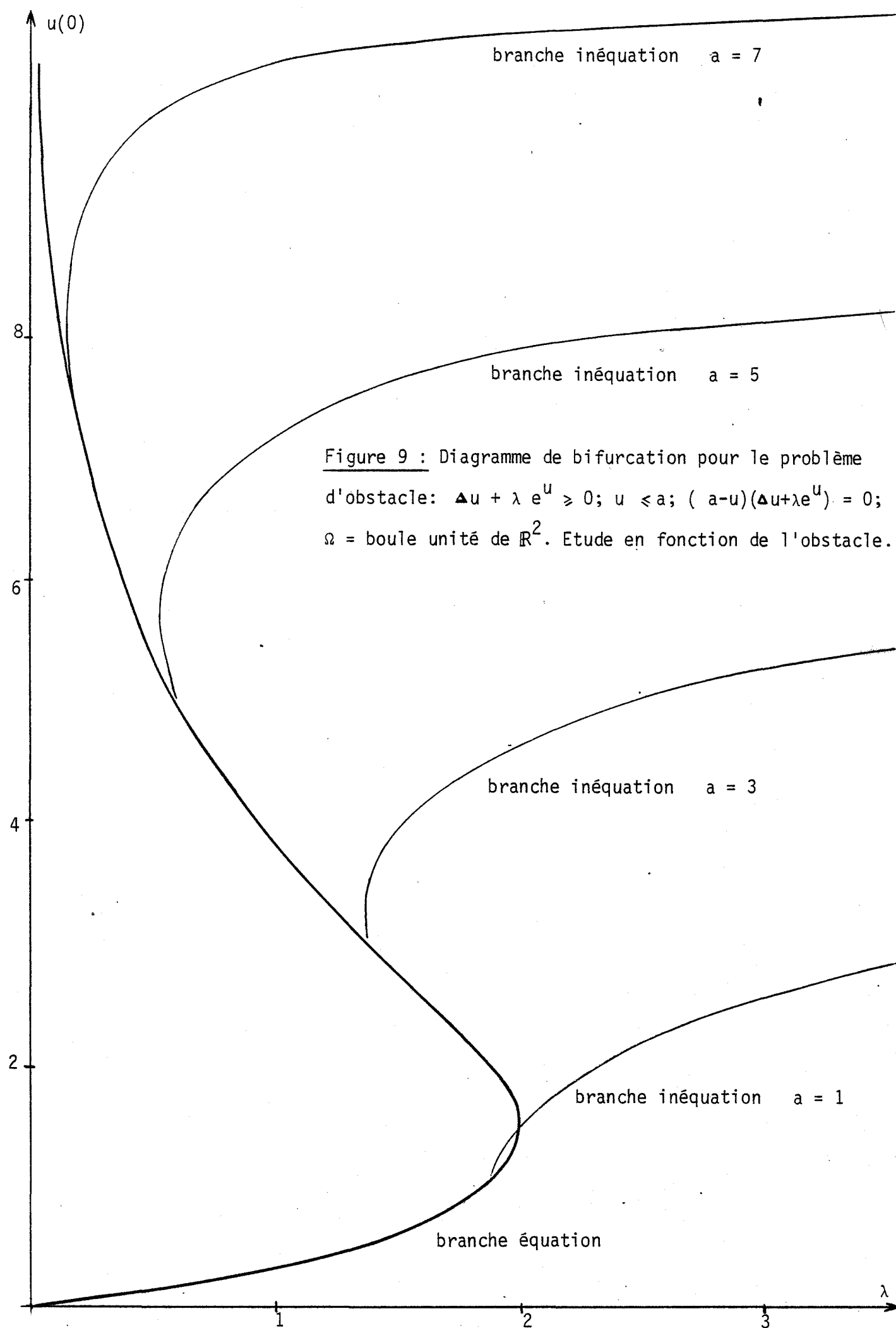
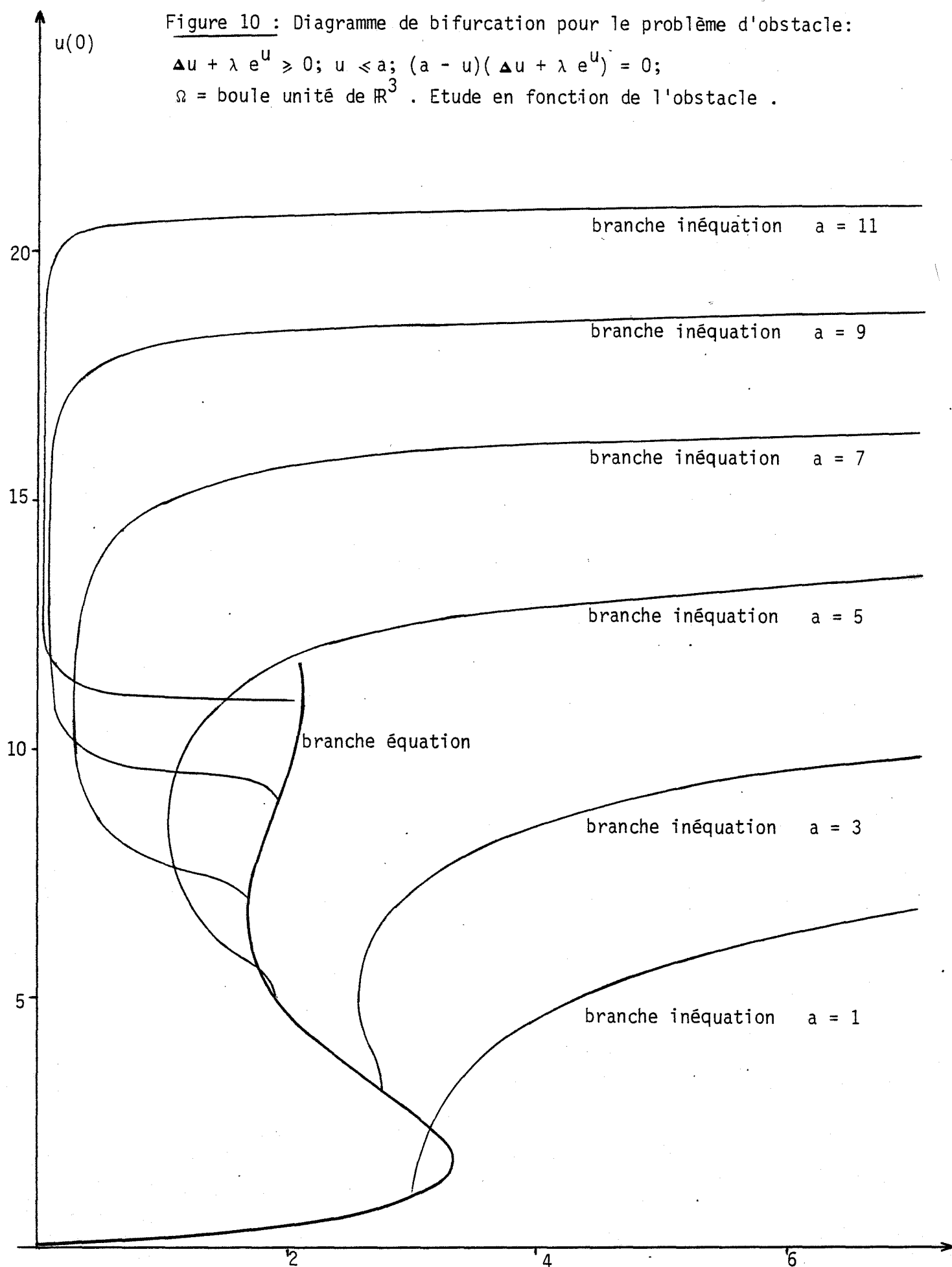


Figure 10 : Diagramme de bifurcation pour le problème d'obstacle:

$$\Delta u + \lambda e^u \geq 0; u \leq a; (a - u)(\Delta u + \lambda e^u) = 0;$$

$\Omega =$ boule unité de \mathbb{R}^3 . Etude en fonction de l'obstacle .



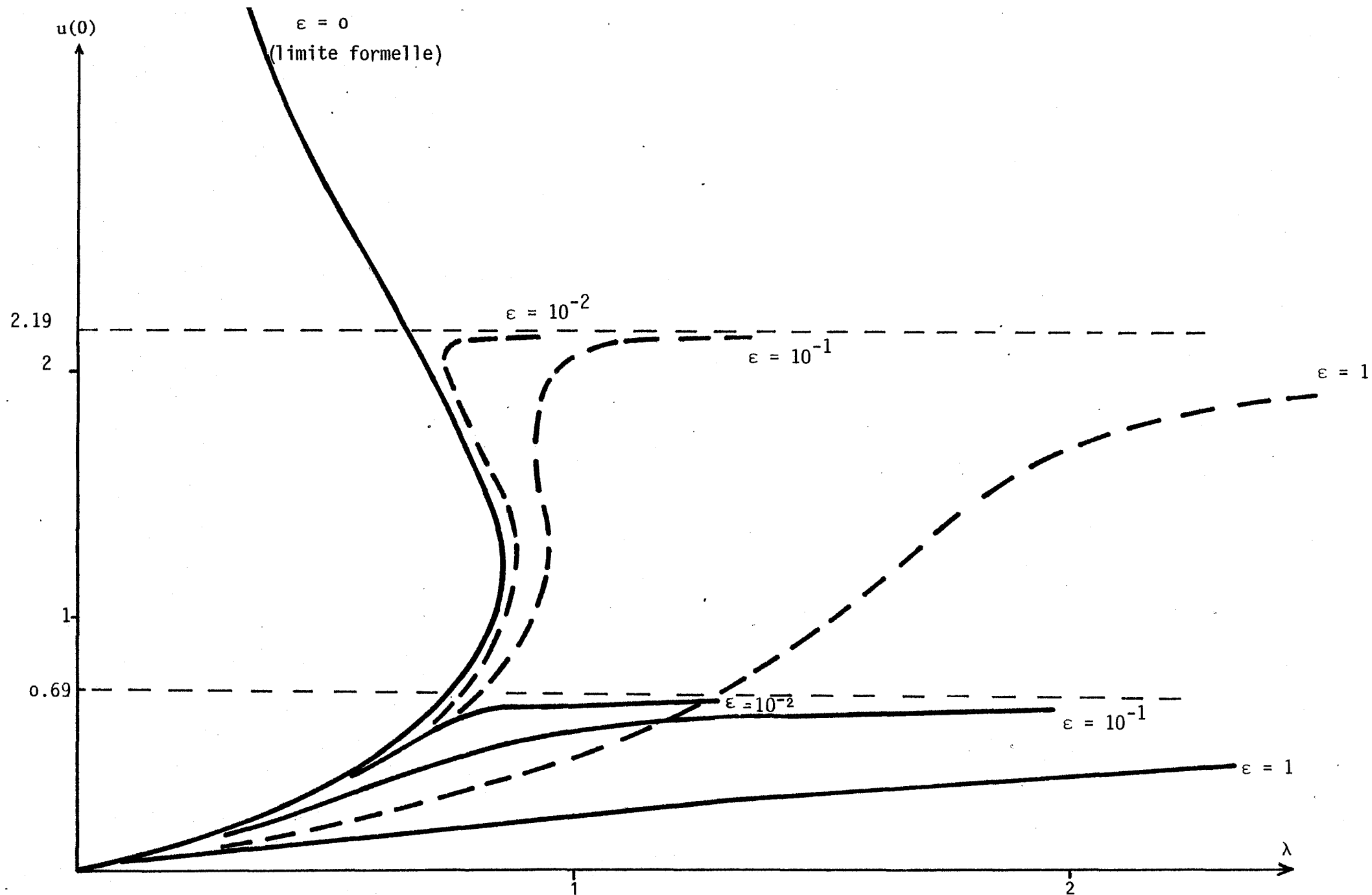
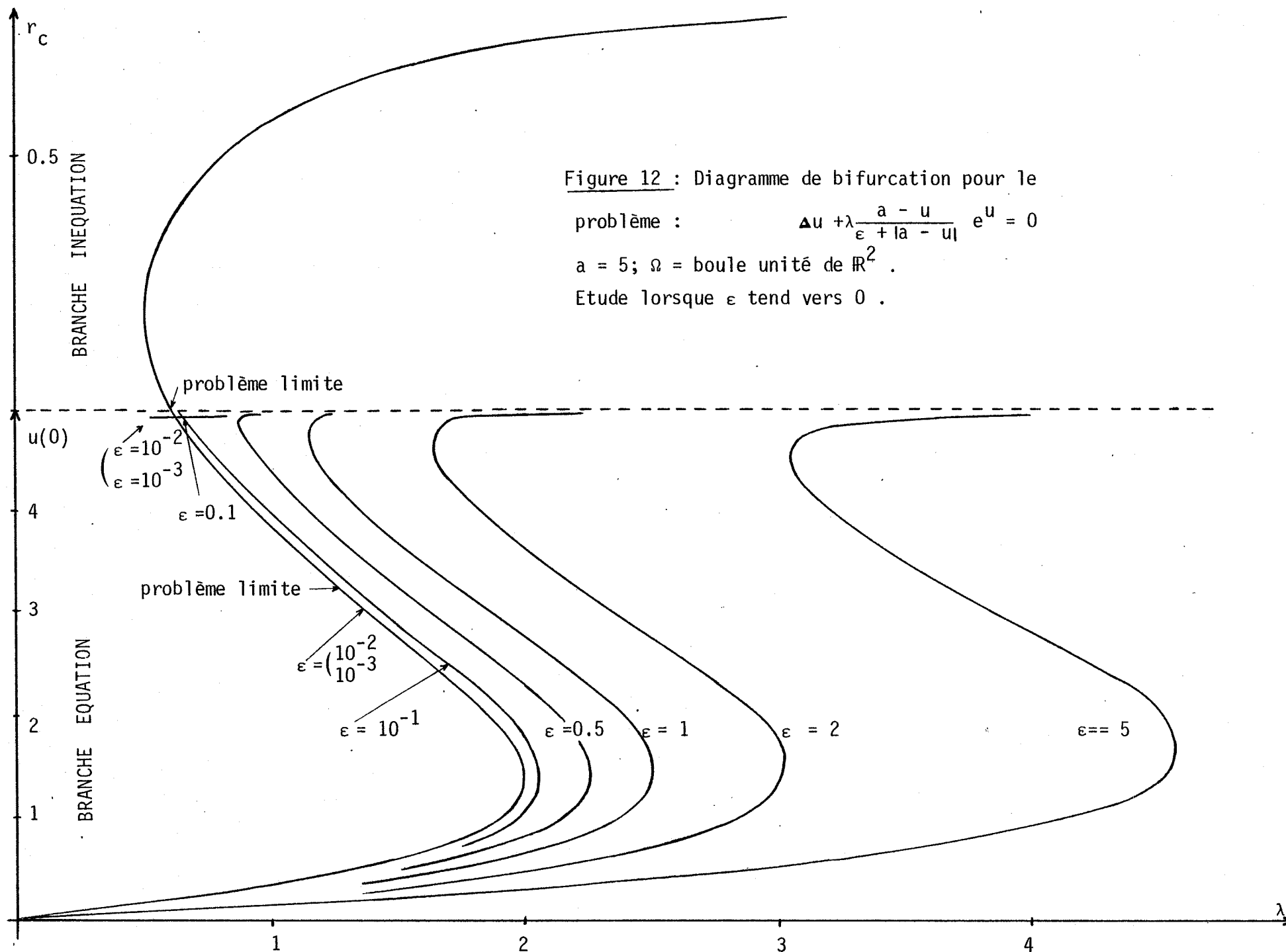
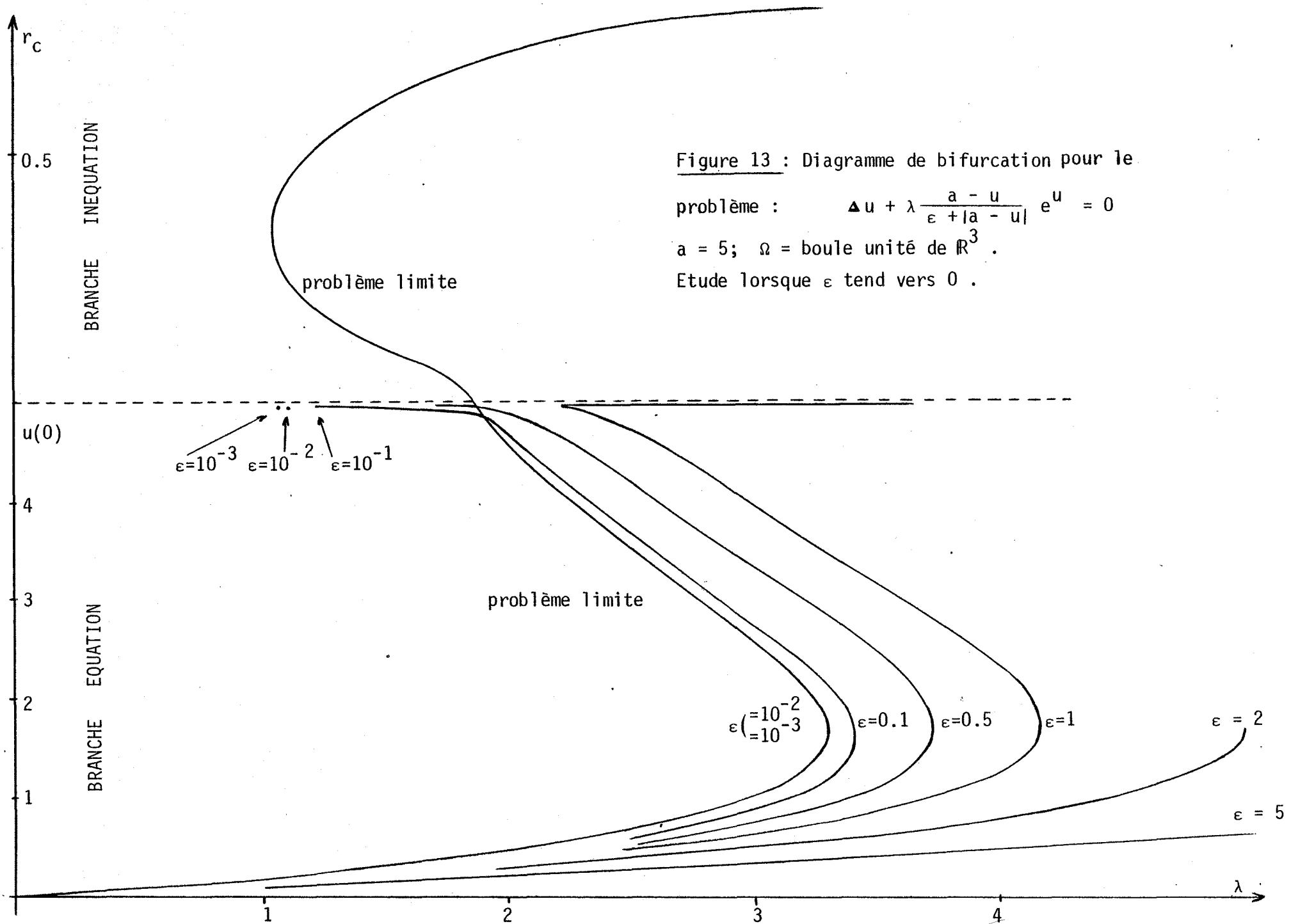


Figure 11: Essais numériques pour $-\Delta u = \lambda \frac{a-u}{\epsilon + a-u} e^u$; $u(-1) = u(1) = 0$. Convergence lorsque $\epsilon \downarrow 0$ pour $a = 0.69$ (trait plein) et $a = 2.19$ (pointillé). ($n = 1$)





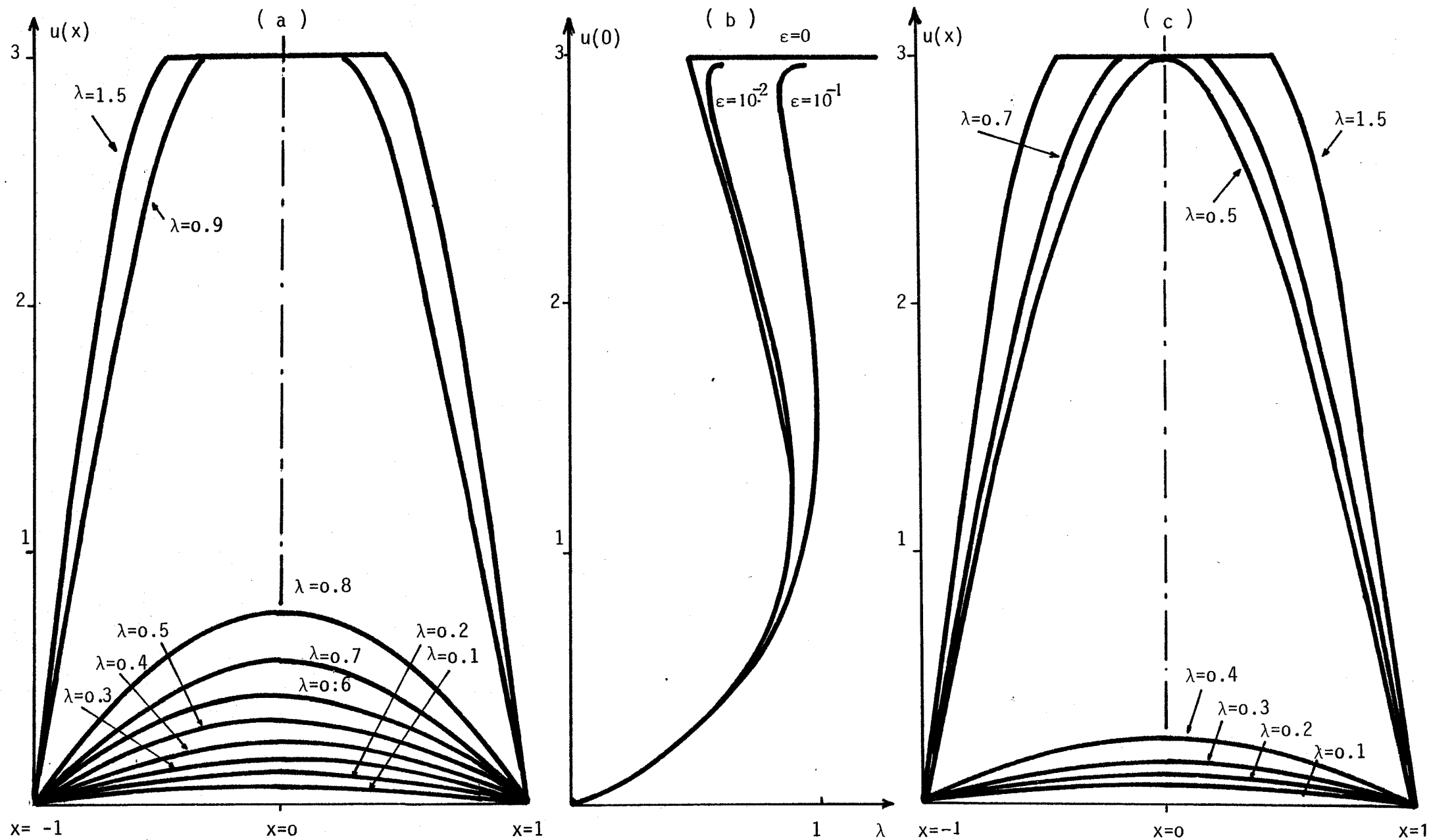


Figure 14: Essais numériques pour $-\Delta u = \lambda \frac{a-u}{\epsilon + (a-u)} e^u$; $u(-1) = u(1) = 0$ avec $a = 3$ ($n = 1$)

a) profil de la solution minimale ($\epsilon = 10^{-4}$) b) étude selon ϵ c) profil de la solution maximale ($\epsilon = 10^{-4}$)

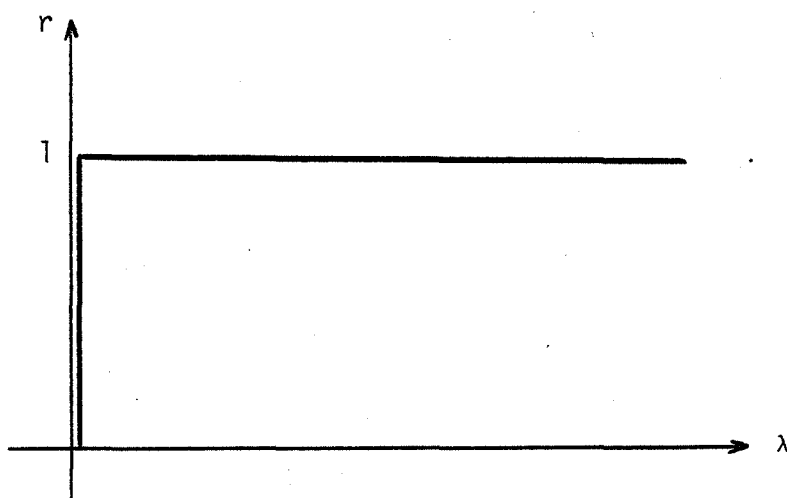
-ANNEXE I-

CONVERGENCE DE LA BRANCHE INEQUATION DE LA SOLUTION
NORMALISEE LORSQUE $\psi \equiv a \rightarrow \infty$ (EN DIMENSION 1)

On reprend le problème de l'obstacle du § VIII en dimension 1 :

$$(1) \begin{cases} u'' + \lambda e^u = 0 & r_c < x < 1 \\ u(r_c) = a ; u'(r_c) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

Rappelons que la branche inéquation (λ, r_c) définie par $r_c = 1 - \sqrt{\frac{\lambda a}{\lambda}}$ (λ_a correspond à la solution de (1) pour $r = 0$) converge, lorsque $a \rightarrow \infty$ et modulo une translation vers le graphe suivant :



Pour $\lambda > 0$, ceci correspond aux solutions limites

$$\lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ (\lambda \rightarrow 0)}} \frac{u(\lambda, x)}{a} = v(x) \equiv a \quad \forall x \in (0, 1).$$

On va voir à quoi correspond l'arc $(\lambda = 0, r_c \in [0, 1])$ en calculant explicitement les solutions limites normalisées $v(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{u(\lambda, x)}{a}$ pour r_c fixé (et $\lambda = \frac{\lambda_a}{(1-r_c)^2}$).

Calcul des solutions de (1)

On multiplie (1) par $u'(x)$ et on intègre entre r_c et x :

$$u'^2(x) + 2\lambda [e^{u(x)} - e^a] = 0 \text{ et comme } u'(x) \leq 0 :$$

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{e^a - e^{u(x)}}} = -\sqrt{2\lambda} \text{ qu'on intègre à nouveau entre } r_c \text{ et } y :$$

$$\int_{u(y)}^a \frac{dt}{\sqrt{e^a - e^t}} = \sqrt{2\lambda} (y - r_c)$$

L'intégrale se calcule en posant $z = \sqrt{e^a - e^t}$

$$\int_0^{\sqrt{e^a - e^{u(y)}}} \frac{dz}{e^a - z^2} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (y - r_c)$$

$$\frac{1}{2e^{a/2}} \operatorname{Log} \frac{e^{a/2} + \sqrt{e^a - e^{u(y)}}}{e^{a/2} - \sqrt{e^a - e^{u(y)}}} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (y - r_c)$$

$$\operatorname{Log} \frac{1 + \sqrt{1 - e^{u-a}}}{1 - \sqrt{1 - e^{u-a}}} = \sqrt{2\lambda} e^{a/2} (y - r_c)$$

(pour $r_c = 0$, $y = 1$, $u = 0$, on obtient λ_a , pour $y = 1$, $u = 0$ on retrouve la relation liant r_c et λ)

Posant $v(y) = \frac{u(y)}{a}$ avec $v(r_c) = 1$, $v(y) < 1$ si $y > r_c$ on a :

$$\operatorname{Log} \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-a(1-v)}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-a(1-v)}}} = \sqrt{2\lambda} e^{a/2} (y - r_c) \text{ si } y > r_c$$

Fixons $r_c \in [0,1)$ et faisons tendre a vers $+\infty$:

$$\text{Log} \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-a(1-v)}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-a(1-v)}}} = \frac{\sqrt{2\lambda_a}}{(1 - r_c)} e^{a/2} (y - r_c) =$$

$$\text{Log} \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-a}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-a}}} \frac{y - r_c}{1 - r_c}$$

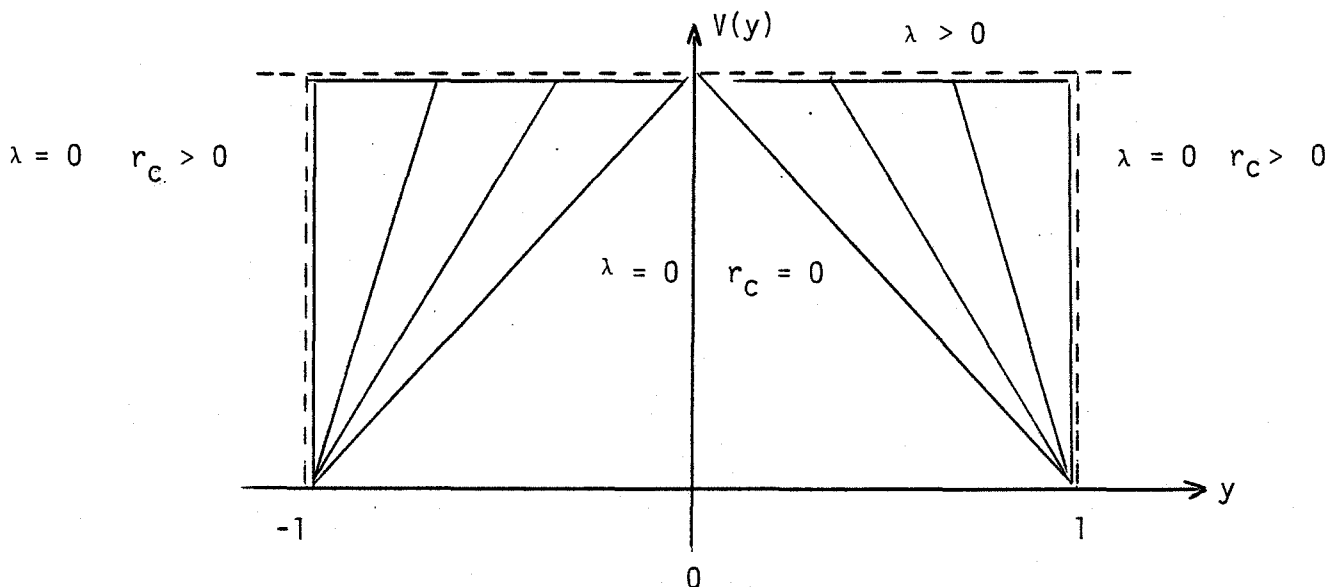
On sait que (modulo extraction) v converge p.p. et donc en prenant des équivalents pour $a \rightarrow \infty$:

$$\text{Log} 4 e^{a(1-v)} = \text{Log} 4 e^a \frac{y - r_c}{1 - r_c} \rightarrow 1 - v_\infty = \frac{y - r_c}{1 - r_c}$$

$$\text{i.e. } v_\infty(y) = \frac{1 - y}{1 - r_c}.$$

Conclusion : Lorsque $a \rightarrow \infty$ on obtient une branche inéquation pour la solution normalisée par a composée de :

- . $v \equiv a$, $\lambda > 0$ ($r_c = 1$)
- . $v = \frac{1-y}{1-r_c}$ $r_c \in [0,1)$ ($\lambda = 0$)



Remarque : Pour $r_c = 0$, $\lambda = 0$, $y(y) = 1 - y$ est la limite bien connue de la solution normalisée de la branche équation (sans obstacle).
Donc, lorsque l'obstacle tend vers $+\infty$ il s'introduit des solutions supplémentaires vis à vis du problème sans obstacle.

-ANNEXE II-

ETUDE ANALYTIQUE DE LA BRANCHE INEQUATION
DU PROBLEME MODELE EN DIMENSION 2

On considère l'inéquation variationnelle du § VII écrite sous la forme forte :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \Delta u + \lambda e^u \geq 0 \\ u \leq a \\ (a - u)(\Delta u + \lambda e^u) = 0 \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right\} \text{ dans } \Omega$$

où Ω est la boule unité de \mathbb{R}^n et on s'intéresse aux solutions à symétrie radiale $u(r)$, $r \in [0,1]$. Toute solution étant dans $W^{2,p}(\Omega)$, il s'ensuit que

$$- \frac{d}{dr} (r^{n-1} \frac{du}{dr}) \geq 0 \quad \text{donc} \quad \frac{du}{dr} \leq 0, \text{ l'ensemble de coïncidence}$$

$\{u / u(x) = a\}$ est vide ou égal à $\{x / |x| \leq r_c\}$ et $(1) \Leftrightarrow$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} u'' + \frac{n-1}{r} u' + \lambda e^u = 0 \quad r \geq r_c \quad r_c \in]0,1[\\ u(r_c) = a \\ u'(r_c) = 0 \\ u(1) = 0 \end{array} \right.$$

dans le cas où $\{x / u(x) = a\} \neq \emptyset$, c'est à dire qu'on a équivalence de (1) et (2) pour la branche inéquation ($r_c > 0$). Nous allons tirer de (2) la relation liant λ et r_c et en déduire dans le cas $n = 2$

*l'allure de la branche inéquation (λ, r_c) , en particulier l'occurrence de retournements

*le comportement "limite" de la branche lorsque $a \rightarrow \infty$, toutes choses déjà observées sur le plan numérique.

Rappelons qu'en dimension 1 la question est résolue et sans grand intérêt : il n'y a pas de retournement sur la branche inéquation.

Rappelons aussi que si r_c est donné dans (2), λ est parfaitement déterminé : on résout (2) avec $\lambda = 1$, sans la condition $u(1) = 0$; soit x_0 tel que $u(x_0) = 1$, alors $\lambda = x_0^2$ est tel que (λ, r_c) est un point de la branche inéquation.

Méthode utilisée : On fait un changement de variables et de fonction rendant l'équation autonome sans dérivée première, et on intègre "à la main" ce qui donne la relation entre λ et r_c .

1. TRANSFORMATION DE L'EQUATION

On pose $r = r_c e^x \quad x \geq 0$

$$u(r) = u(r_c e^x) = v(x) \quad (2) \Leftrightarrow$$

$$(3) \quad \begin{cases} v'' + (n-2) v' + \lambda r_c^2 e^{v+2x} = 0 \\ v(0) = a ; v'(0) = 0 \\ v(-\text{Log } r_c) = 0 \end{cases}$$

$$\text{puis } w = v + 2x \quad (3) \Leftrightarrow$$

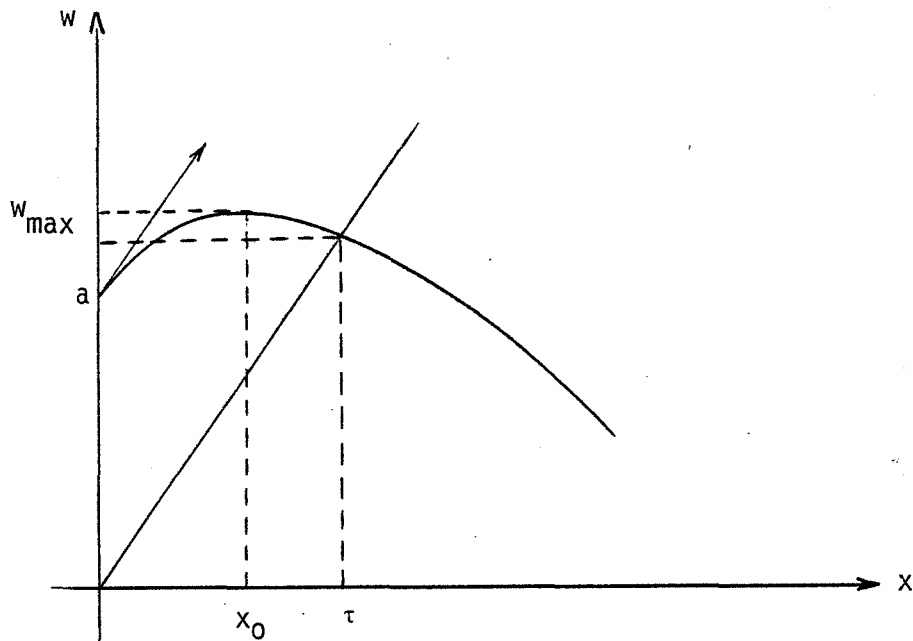
$$(4) \quad \begin{cases} w'' + (n-2) (w'-2) + \lambda r_c^2 e^w = 0 \\ w(0) = a ; w'(0) = 2 \\ w(-\text{Log } r_c) = -2 \text{Log } r_c \end{cases}$$

soit avec $\mu = \lambda r_c^2$ et $\tau = -\text{Log } r_c$

$$(5) \quad \begin{cases} w'' + \mu e^w = 0 \\ w(0) = a ; w'(0) = 2 \\ w(\tau) = 2\tau \end{cases} \quad (\text{pour } n = 2)$$

On va travailler sur (5) : on "tire" avec $\mu > 0$ i.e, on résout le problème de Cauchy (5) avec μ qui admet une unique solution strictement convexe $w(x)$ ce qui donne une unique intersection de la courbe w avec la droite de pente 2, dont l'abscisse est $\tau = \tau(\mu) > 0$ et on a un "bon"

$$\text{paramétrage: } r_c = e^{-\frac{\tau(\mu)}{2}}, \quad \lambda = \mu e^{-\tau(\mu)}$$



2. INTEGRATION DE L'EQUATION (5)

On multiplie (5) par w' et on intègre de 0 à x :

$$(6) \quad w'^2(x) - 4 + 2\mu [e^{w(x)} - e^a] = 0$$

Soit x_0 tel que $w(x_0) = \max w(x) : w'(x_0) = 0 \Rightarrow$

$$w_{\max} = \text{Log} \left[e^a + \frac{2}{\mu} \right]$$

pour $x \in [0, x_0]$ w' est ≥ 0 donc (6) \Leftrightarrow

$$\frac{w'}{\sqrt{4 + 2\mu [e^w - e^a]}} = 1 \quad \text{qui s'intègre entre 0 et } x_0 :$$

$$x_0 = \int_a^{w_{\max}} \frac{dt}{\sqrt{4 + 2\mu [e^t - e^a]}} = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\mu e^a}} \text{Log} \frac{\sqrt{4 + 2\mu e^a} + 2}{\sqrt{4 + 2\mu e^a} - 2}$$

On va maintenant intégrer (6) de la même façon entre 0 et τ en distinguant les cas $\tau \leq x_0$ (w' est ≥ 0) et $\tau \geq x_0$ (w' change de signe en x_0) puis écrire que τ vérifie : $w(\tau) = 2\tau$.

Remarquons que $\tau \leq x_0 \Leftrightarrow$

$$2 x_0 \geq w(x_0) = w_{\max} \Leftrightarrow$$

$$\text{Log} \sqrt{e^a + \frac{2}{\mu}} \leq \frac{1}{\sqrt{4+2\mu e^a}} \quad \text{Log} \frac{\sqrt{4+2\mu e^a} + 2}{\sqrt{4+2\mu e^a} - 2}$$

la discussion des cas porte uniquement sur μ

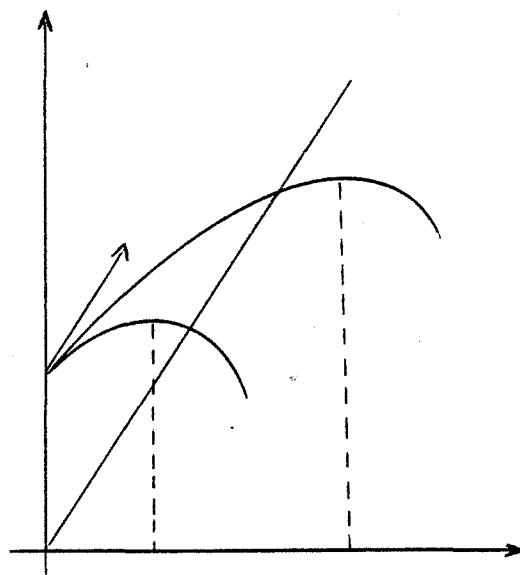
En particulier, en faisant tendre μ vers 0 (resp ∞) on montre que :

pour $\mu \sim \infty$ on est toujours dans le

2ème cas : $\tau \geq x_0$

pour $\mu \sim 0$ on est toujours dans le 2ème

cas : $\tau \geq x_0$ si $a > 2 \text{Log } 2$ et dans le 1er cas si $a < 2 \text{Log } 2$.



La valeur $a = 2 \text{Log } 2$ correspond à la valeur $u^*(0)$ du point de retournement de la branche équation du problème $\Delta u + \lambda e^u = 0$ pour $n = 2$ (cf.

[4] où tous ces calculs sont effectués). On va supposer que la branche équation de notre problème admet un retournement, i.e $a \geq 2 \text{Log } 2$; on est donc dans le 2ème cas, pour $\mu \sim 0$.

Intégration dans le premier cas : $\tau \leq x_0$: w' est ≥ 0 et (6) s'écrit

$$\frac{w'(x)}{\sqrt{4 + 2\mu [e^a - e^w]}} = 1 \quad \text{qu'on intègre de } 0 \text{ à } \tau :$$

$$\int_a^{w(\tau)} \frac{dt}{\sqrt{4 + 2\mu [e^a - e^t]}} = \tau \quad \text{puis on écrit que } w(\tau) = 2\tau$$

ce qui donne la relation implicite :

$$(7) \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\mu e^a}} \text{Log} \frac{(\sqrt{1+\frac{\mu}{2} e^a} + 1) (\sqrt{1+\frac{\mu}{2} e^a} - \sqrt{1+\frac{\mu}{2} e^a - \frac{\mu}{2} e^{2\tau}})}{(\sqrt{1+\frac{\mu}{2} e^a} - 1) (\sqrt{1+\frac{\mu}{2} e^a} + \sqrt{1+\frac{\mu}{2} e^a - \frac{\mu}{2} e^{2\tau}})}$$

Dans le deuxième cas, $\tau \geq x_0$ on intègre la relation :

$$\frac{w'(x)}{\sqrt{4 + 2\mu [e^a - e^w]}} = -1 \text{ de } x_0 \text{ à } \tau \text{ ce qui donne :}$$

$$\int_{w_{\max}}^{w(\tau)} \frac{dt}{\sqrt{4 + 2\mu [e^a - e^t]}} = -(\tau - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\tau = x_0 + \int_{w(\tau)}^{w_{\max}} \frac{dt}{\sqrt{4 + 2\mu [e^a - e^t]}} \text{ et en écrivant que } w(\tau) = 2\tau :$$

$$(8) \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\mu e^a}} \text{ Log } \frac{(\sqrt{1 + \frac{\mu}{2} e^a} + 1) (\sqrt{1 + \frac{\mu}{2} e^a} + \sqrt{1 + \frac{\mu}{2} e^a - \frac{\mu}{2} e^{2\tau}})}{(\sqrt{1 + \frac{\mu}{2} e^a} - 1) (\sqrt{1 + \frac{\mu}{2} e^a} - \sqrt{1 + \frac{\mu}{2} e^a - \frac{\mu}{2} e^{2\tau}})}$$

3. COMPORTEMENT LORSQUE $\mu \rightarrow \infty$:

On est dans le cas (8) qui s'écrit, avec $\Lambda = \frac{\lambda}{2} e^a + \infty$ et $r^2 = R$ ($\lambda = \frac{\mu}{r^2} \rightarrow \infty$), en négligeant ce qui tend vers 0 :

$$(9) \quad -\text{Log } R = \text{Log } \frac{\sqrt{1 + R\Lambda} + \sqrt{1 + R\Lambda - \Lambda e^{-a}}}{\sqrt{1 + R\Lambda} - \sqrt{1 + R\Lambda - \Lambda e^{-a}}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \Lambda R}}$$

$R = r^2$ ne peut pas tendre vers e^{-a} sinon on aurait $a = 0$ ce qu'on exclut ! Donc $\Lambda [R - e^{-a}] \rightarrow \alpha \Lambda, \alpha \neq 0$ et il est alors facile de voir sur la formule ci-dessus lorsque $\Lambda \rightarrow +\infty$ que $\lim R \geq e^{-a}$ et en fait $\text{Log } R \rightarrow 0$ i.e. $\underline{R \rightarrow 1}$

On peut d'ailleurs tout aussi bien considérer la relation (8) écrite en Λ, R :

$$(10) \quad -\sqrt{1+\Delta R} \log R = \log \frac{(\sqrt{1+\Delta R} + 1)(\sqrt{1+\Delta R} + \sqrt{1+\Delta R - \Delta e^{-a}})}{(\sqrt{1+\Delta R} - 1)(\sqrt{1+\Delta R} - \sqrt{1+\Delta R - \Delta e^{-a}})}$$

faire tendre R vers 1 et vérifier que $\Delta = \Delta(R) \rightarrow \infty$ (si $\Delta \rightarrow \Delta_0$ on a une absurdité : $\Delta_0 = 0$!).

4. COMPORTEMENT LORSQUE $\mu \rightarrow 0$

Si $a > 2 \log 2$ on est dans le cas (8) et on utilise (10)

$$\mu = \lambda r^2 = 2 e^{-a} \Delta R \text{ donc } \Delta R \rightarrow 0 \text{ et}$$

$$1 + \Delta R - \Delta e^{-a} \geq 0 \text{ donc } \Delta \text{ est borné et } R = r^2 \rightarrow 0$$

La relation (10) s'écrit, au premier ordre :

$$-\log R = 2 \log 2 - \log R - \log \Delta + \log \frac{1 + \sqrt{1 - \Delta e^{-a}}}{1 - \sqrt{1 - \Delta e^{-a}}}$$

si $\Delta \neq 0$ ce qui est vrai ! (Sinon $\log \Delta = 2 \log 2$: absurde !) \rightarrow

$$\Delta = 4 \frac{1 + \sqrt{1 - \Delta e^{-a}}}{1 - \sqrt{1 - \Delta e^{-a}}} \rightarrow \lambda = \frac{8}{e^a} \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{\lambda}{2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda}{2}}} \quad (11)$$

ce qui donne $\lambda = \lambda_a = 2 [1 - (2 e^{-\frac{a}{2}} - 1)^2]$ qui est très précisément la valeur correspondant au problème de l'équation pour $U_{\max} = a$ cf. [4]

Ce résultat s'obtient aussi en faisant tendre R vers 0 (i.e $\mu \rightarrow 0$ est $\Leftrightarrow R \rightarrow 0$ et $\mu \rightarrow \infty \Leftrightarrow R \rightarrow 1$).

Si $a < 2 \log 2$ (pas de retournement sur la branche équation) on trouve

que $R \rightarrow 0$ et $\lambda \rightarrow \lambda_a = \frac{8}{e^a} \frac{1 - \sqrt{1 - \lambda/2}}{1 + \sqrt{1 - \lambda/2}}$ (en prenant la forme (7)) ce qui donne encore la même valeur $\lambda_a = 2 [1 - (2 e^{-\frac{a}{2}} - 1)^2]$.

Revenons au premier cas et essayons de préciser l'allure de la courbe $\lambda = \lambda(r)$ au voisinage de 0 en calculant $(\frac{d\lambda}{dr})_{r=0}$

On écrit (10) avec $\Lambda = \frac{\lambda}{2} e^a$ et $R = r^2$:

$$(10) -2 \sqrt{1+\Lambda r^2} \log r = \log \frac{\sqrt{1+\Lambda r^2} + 1}{\sqrt{1+\Lambda r^2} - 1} - \frac{\sqrt{1+\Lambda r^2} + \sqrt{1+\Lambda r^2 - \Lambda e^{-a}}}{\sqrt{1+\Lambda r^2} - \sqrt{1+\Lambda r^2 - \Lambda e^{-a}}}$$

et on dérive par rapport à r pour $r \sim 0$:

$$(11) -\frac{2}{r} \sqrt{1+\Lambda r^2} - 2 \log r \frac{\Lambda' r^2 + 2 \Lambda r}{2 \sqrt{1+\Lambda r^2}} = \frac{\Lambda' r^2 + 2 \Lambda r}{2 \sqrt{1+\Lambda r^2} (\sqrt{1+\Lambda r^2} + 1)}$$

$$- \frac{\Lambda' r^2 + 2 \Lambda r}{2 \sqrt{1+\Lambda r^2} (\sqrt{1+\Lambda r^2} - 1)} + \frac{\frac{\Lambda' r^2 + 2 \Lambda r}{2 \sqrt{1+\Lambda r^2}} + \frac{\Lambda' r^2 + 2 \Lambda r - \Lambda' e^{-a}}{2 \sqrt{1+\Lambda r^2 - \Lambda e^{-a}}}}{\sqrt{1+\Lambda r^2} + \sqrt{1+\Lambda r^2 - \Lambda e^{-a}}}$$

$$- \frac{\frac{\Lambda' r^2 + 2 \Lambda r}{2 \sqrt{1+\Lambda r^2}} - \frac{\Lambda' r^2 + 2 \Lambda r - \Lambda' e^{-a}}{2 \sqrt{1+\Lambda r^2 - \Lambda e^{-a}}}}{\sqrt{1+\Lambda r^2} - \sqrt{1+\Lambda r^2 - \Lambda e^{-a}}}$$

En négligeant les termes qui tendent vers 0 et en supposant $r \Lambda'(r)$ borné au voisinage de 0, et $\lambda \neq 2$ ($\Lambda e^{-a} \neq 1$) :

$$-\frac{2}{r} = -\frac{\Lambda'}{\Lambda} - \frac{2}{r} - \frac{\Lambda' e^{-a}}{2 \sqrt{1-\Lambda e^{-a}} (1 + \sqrt{1-\Lambda e^{-a}})} - \frac{\Lambda' e^{-a}}{2 \sqrt{1-\Lambda e^{-a}} (1 - \sqrt{1-\Lambda e^{-a}})}$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{1}{4 \sqrt{1-\lambda/2}} \lambda' \left[\frac{1}{1 + \sqrt{1-\lambda/2}} + \frac{1}{1 - \sqrt{1-\lambda/2}} \right] = 0 \text{ i.e.}$$

$\lambda' = \frac{d\lambda}{dr} = 0$ c'est-à-dire que la branche inéquation dans le plan (λ, r) démarre avec une tangente verticale.

Si on suppose qu'on est dans le cas $a < 2 \log 2$ on trouve, pour λ' , l'équation suivante :

$$-\frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{\lambda'}{4 \sqrt{1-\lambda/2}} \left[\frac{1}{1 + \sqrt{1-\lambda/2}} + \frac{1}{1 - \sqrt{1-\lambda/2}} \right] = 0$$

ce qui donne aussi $\lambda' = 0$ dans tous les cas.

Pour avoir la variation première de λ autour de λ_a , on calcule $\frac{1}{r} \lambda'(r)$ pour $r \sim 0$: $\frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} = 2 \frac{d\lambda}{dR}$ on a donc intérêt à prendre la relation (10) en (Λ, R) puisque $\frac{d\lambda}{dR} = 2 e^{-a} \frac{d\Lambda}{dR}$

$$(10) \quad -\sqrt{1+\Lambda R} \log R = \log \frac{\sqrt{1+\Lambda R} + 1}{\sqrt{1+\Lambda R} - 1} - \frac{\sqrt{1+\Lambda R} + \sqrt{1+\Lambda R - \Lambda e^{-a}}}{\sqrt{1+\Lambda R} - \sqrt{1+\Lambda R - \Lambda e^{-a}}}$$

qu'on dérive en posant $\Lambda' = d\Lambda / dR$:

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{1+\Lambda R}}{R} - \log R \frac{\Lambda' R + \Lambda}{2 \sqrt{1+\Lambda R}} &= \frac{\frac{\Lambda' R + \Lambda}{2 \sqrt{1+\Lambda R}}}{\sqrt{1+\Lambda R} + 1} - \\ \frac{\frac{\Lambda' R + \Lambda}{2 \sqrt{1+\Lambda R}}}{\sqrt{1+\Lambda R} - 1} + \frac{\frac{\Lambda' R + \Lambda}{2 \sqrt{1+\Lambda R}} + \frac{\Lambda' R + \Lambda - \Lambda' e^{-a}}{2 \sqrt{1+\Lambda R - \Lambda e^{-a}}}}{\sqrt{1+\Lambda R} + \sqrt{1+\Lambda R - \Lambda e^{-a}}} &= \\ -\frac{\frac{\Lambda' R + \Lambda}{2 \sqrt{1+\Lambda R}}}{\sqrt{1+\Lambda R} - \sqrt{1+\Lambda R - \Lambda e^{-a}}} - \frac{\frac{\Lambda' R + \Lambda - \Lambda' e^{-a}}{2 \sqrt{1+\Lambda R - \Lambda e^{-a}}}}{\sqrt{1+\Lambda R} - \sqrt{1+\Lambda R - \Lambda e^{-a}}} & \end{aligned}$$

ce qui donne, en négligeant les termes qui tendent vers 0 :

$$-\frac{3\Lambda}{4} - \frac{\Lambda}{2} \log R = -\frac{\Lambda'}{\Lambda} + \frac{\frac{\Lambda}{2} + \frac{\Lambda - \Lambda' e^{-a}}{2 \sqrt{1 - \Lambda e^{-a}}}}{1 + \sqrt{1 - \Lambda e^{-a}}} - \frac{\frac{\Lambda}{2} - \frac{\Lambda - \Lambda' e^{-a}}{2 \sqrt{1 - \Lambda e^{-a}}}}{1 - \sqrt{1 - \Lambda e^{-a}}}$$

$$-\frac{3\Lambda}{4} - \frac{\Lambda}{2} \log R = -\frac{\Lambda'}{\Lambda} - \frac{\sqrt{1-\Lambda e^{-a}}}{e^{-a}} + \frac{1 - \frac{\Lambda'}{\Lambda} e^{-a}}{e^{-a} \sqrt{1-\Lambda e^{-a}}}$$

donc $\frac{\Lambda'}{\Lambda} \rightarrow \infty$ et $\frac{\lambda'(r)}{r} \rightarrow \infty$ lorsque $r \rightarrow 0$

On a par conséquent un comportement très singulier de la branche lorsque $r \rightarrow 0$.

5. COMPORTEMENT GLOBAL DE LA BRANCHE LORSQUE $a \rightarrow +\infty$

On voit facilement que, lorsque $a \rightarrow \infty$ on a toujours

$$\log \sqrt{e^a + \frac{2}{\mu}} > \frac{1}{\sqrt{4+2\mu e^a}} \log \frac{\sqrt{4+2\mu e^a} + 2}{\sqrt{4+2\mu e^a} - 2} \quad \forall \mu < \infty \text{ fixé}$$

donc c'est encore l'équation (8) qui va nous servir. Cependant, on va plutôt fixer τ (i.e. r) et calculer $\mu = \mu(\tau, a)$ donc on n'est pas assuré d'être dans le deuxième cas et il faut effectuer les calculs à la fois sur (7) et sur (8). Faisons le pour (8) :

on fixe $r \in]0,1[$ i.e. $\tau \in]0,\infty[$

Supposons que $\mu(r, a) \rightarrow \mu(r, \infty) = \mu^* > 0$ lorsque $a \rightarrow \infty$:

$$(8) \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{4+2\mu e^a}} \log \frac{\sqrt{1+\frac{\mu}{2}e^a} + 1}{\sqrt{1+\frac{\mu}{2}e^a} - 1} \frac{\sqrt{1+\frac{\mu}{2}e^a} + \sqrt{1+\frac{\mu}{2}e^a - \frac{\mu}{2}e^{2\tau}}}{\sqrt{1+\frac{\mu}{2}e^a} - \sqrt{1+\frac{\mu}{2}e^a - \frac{\mu}{2}e^{2\tau}}}$$

et $\tau \sim \frac{1}{\sqrt{2\mu^*e^a}} \log \frac{4e^a}{e^{2\tau}}$ i.e. $\tau = 0$ ce qui est exclu.

Le cas $\mu \rightarrow +\infty$ étant exclu par le même argument, il s'ensuit que (en fait modulo extraction) $\mu \rightarrow 0$ lorsque $a \rightarrow +\infty$, r fixé $\in]0,1[$ c'est-à-dire qu'on a convergence de la branche inéquation (λ, r) vers la fonction de Heaviside.

6. EXISTENCE D'UN RETOURNEMENT SUR LA BRANCHE INEQUATION POUR a GRAND

Soit λ_a la valeur de λ correspondant au passage équation-inéquation :

$$\lambda_a = 2 [1 - (2 e^{-\frac{a}{2}} - 1)^2] = 8 e^{-\frac{a}{2}} [1 - e^{-\frac{a}{2}}]$$

Soit $\lambda^*(a)$ la valeur du paramètre correspondant à $r = e^{-\frac{a}{2}}$. On va montrer que pour a assez grand $\lambda^*(a) < \lambda_a$ ce qui suffit pour assurer l'existence d'un retournement, puisque si $r \rightarrow 1_-$, $\lambda \rightarrow +\infty$; on a

$$\frac{\mu}{2} e^a = \lambda \frac{r^2 e^a}{2} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \frac{\mu}{2} e^{2\tau} = \frac{\lambda r^2}{2r^2} = \frac{\lambda}{2}$$

et (7) s'écrit alors :

$$\tau = \frac{a}{2} = \frac{1}{\sqrt{4+2\mu e^a}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{1+\frac{\lambda}{2}} - 1}{\sqrt{1+\frac{\lambda}{2}} - 1} \Rightarrow a = 0 \text{ si } \lambda \neq 0$$

ce qui est absurde !

On est donc toujours dans le deuxième cas pour calculer $\lambda = \lambda^*(a)$; on doit résoudre (8) qui s'écrit :

$$a = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda/2}} \operatorname{Log} \left[\frac{\sqrt{1+\lambda/2} + 1}{\sqrt{1+\lambda/2} - 1} \right]^2 \Leftrightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda/2}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{1+\lambda/2} + 1}{\sqrt{1+\lambda/2} - 1}$$

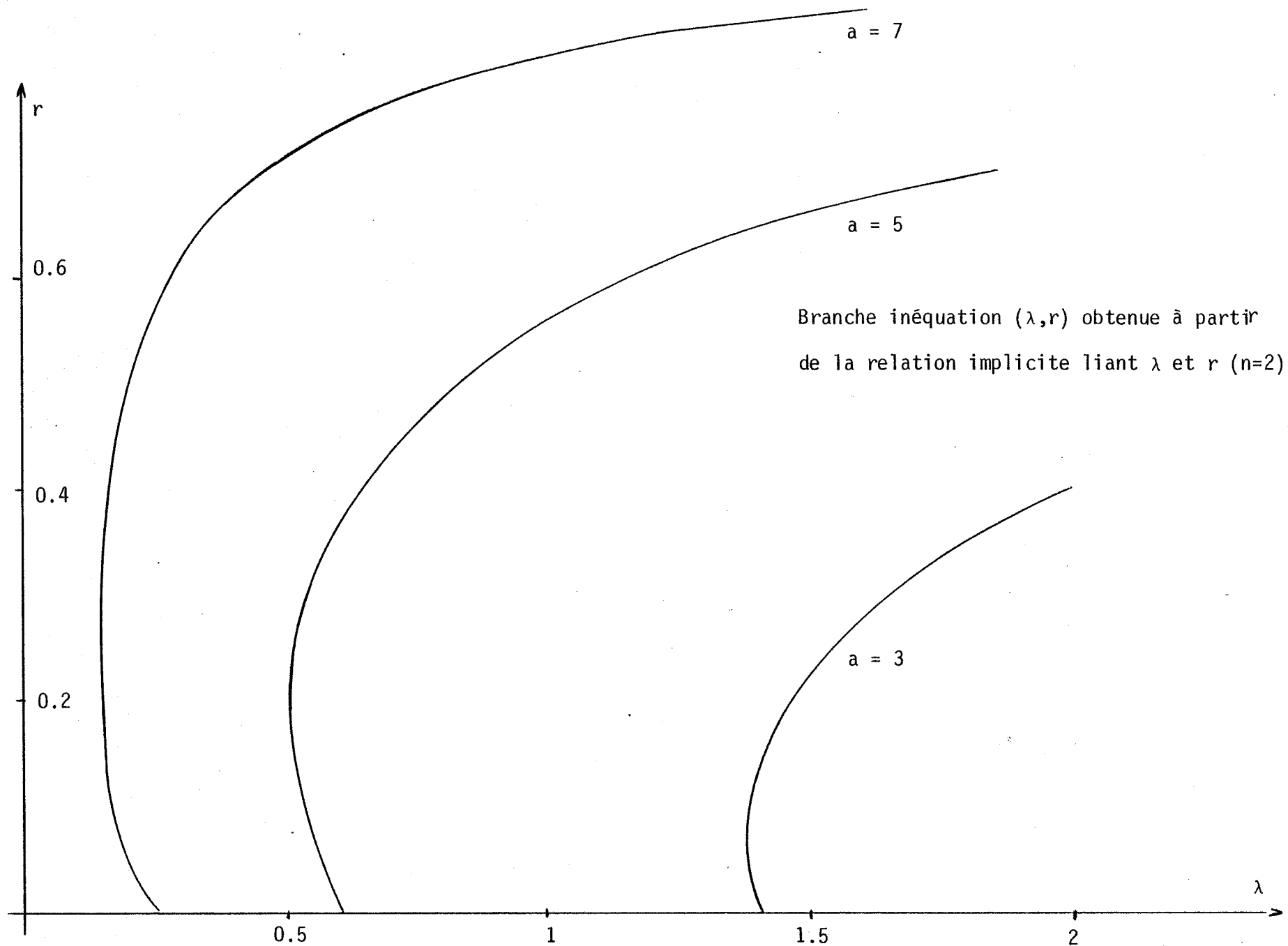
$$\Leftrightarrow g(\lambda) = \frac{a}{2} \text{ avec } g(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda/2}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{1+\lambda/2} + 1}{\sqrt{1+\lambda/2} - 1}$$

On sait que la solution λ est unique. D'autre part $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} g(\lambda) = \infty > \frac{a}{2}$. Si donc on montre que $g(\lambda_a) < \frac{a}{2}$ on aura à coup sûr $\lambda^*(a) < \lambda_a$ ce qui suffit ;

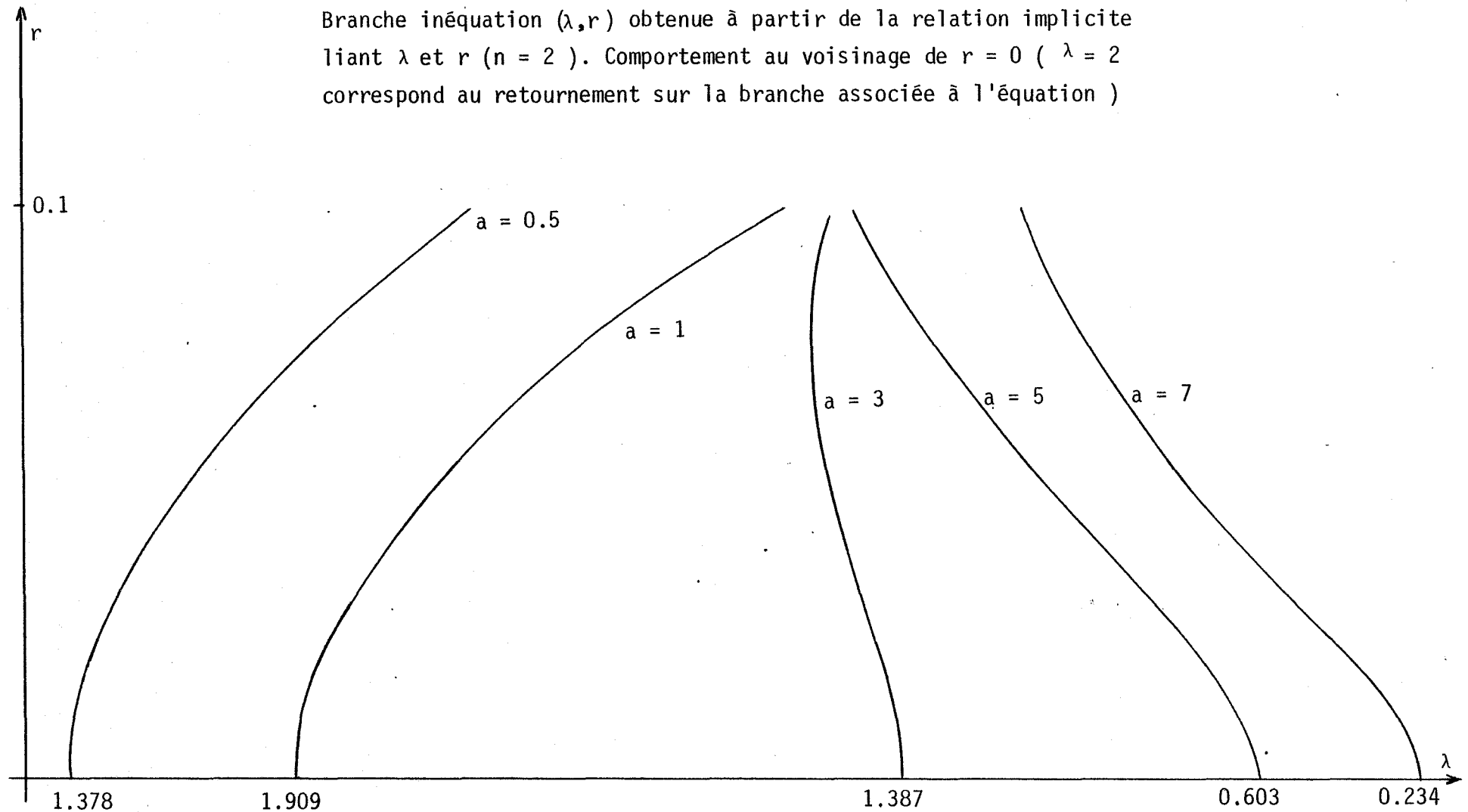
$$g(\lambda_a) = [1 + 4e^{-\frac{a}{2}} - 4e^{-a}]^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Log} \frac{(1 + 4e^{-\frac{a}{2}} - 4e^{-a})^{\frac{1}{2}} + 1}{(1 + 4e^{-\frac{a}{2}} - 4e^{-a})^{\frac{1}{2}} - 1}$$

D'où en ne gardant que les termes les plus grands :

$$\begin{aligned}
 g(\lambda_a) &\sim (1 - 2e^{-\frac{a}{2}}) \operatorname{Log} \frac{2 + 2e^{-\frac{a}{2}}}{2e^{-\frac{a}{2}} - 4e^{-a}} \\
 &\sim (1 - 2e^{-\frac{a}{2}}) \left[\frac{a}{2} + \operatorname{Log} (1 + 3e^{-\frac{a}{2}}) \right] \\
 &= \frac{a}{2} + (3 - a) e^{-\frac{a}{2}} + \dots < \frac{a}{2} \text{ dès que } a > 3
 \end{aligned}$$



Branche inéquation (λ, r) obtenue à partir de la relation implicite liant λ et r ($n = 2$). Comportement au voisinage de $r = 0$ ($\lambda = 2$ correspond au retournement sur la branche associée à l'équation)



CHAPITRE V

ETUDE LOCALE DE BRANCHES DE SOLUTIONS D'UNE CLASSE D'I.V. (PROBLEMES D'OBSTACLE)

SOMMAIRE

PREMIERE PARTIE : POINTS SINGULIERS, POINTS REGULIERS, DIRECTIONS CONIQUES, EXEMPLES.

- I - HYPOTHESES ET NOTATIONS
 - II - EXISTENCE D'UNE BRANCHE DE SOLUTIONS
 - III - POINTS SINGULIERS DE L'I.V.
 - IV - POINTS REGULIERS - CALCUL DES DIRECTIONS CONIQUES
 - V - COMPLEMENTS - CAS PARTICULIERS
- ANNEXE : Calcul des directions coniques dans deux exemples de problèmes d'obstacle.

DEUXIEME PARTIE : DEVELOPPEMENTS LOCAUX, POINTS DE RETOURNEMENT (EN COLLABORATION AVEC F. ISSARD - ROCH)

- I - HYPOTHESES ET NOTATIONS
 - II - EXISTENCE LOCALE ET UNILATERALE, DANS LE CAS GENERAL, D'UN DEVELOPPEMENT AUTOUR DE CERTAINS POINTS REGULIERS
 - III - ETUDE LOCALE LORSQUE S_{u*} EST UN ESPACE VECTORIEL
- ANNEXE : Validité et interprétation de la condition (\mathcal{S})

TROISIEME PARTIE : UNE APPROCHE PAR LE DEGRE TOPOLOGIQUE (EN COLLABORATION AVEC B. NICOLAENKO)

- I - INTRODUCTION
- II - EXISTENCE DE BRANCHES EN CERTAINS POINTS REGULIERS
- III - COMPORTEMENT EN CERTAINS POINTS SINGULIERS

ETUDE LOCALE DES BRANCHES DE SOLUTIONS DANS UN PROBLEME D'OBSTACLE

PREMIERE PARTIE

POINTS SINGULIERS, POINTS REGULIERS, DIRECTIONS CONIQUES, EXEMPLES

Résumé : On s'intéresse à une classe d'inéquations variationnelles associées à un problème d'obstacle. On se place dans des hypothèses assurant l'existence d'une branche non bornée de solutions et on cherche le comportement local de la branche, plus précisément la "direction" de la branche. Ceci introduit des points singuliers, caractérisés par une inéquation "conifiée" de l'I.V de départ, opération qui généralise la linéarisation qu'on effectue traditionnellement sur les équations. Aux points non singuliers, on trouve les directions "coniquement" tangentes comme solution d'une I.V. Ce travail est à considérer comme un premier pas vers la généralisation aux I.V de l'étude des points critiques d'une équation (points de retournement en particulier) ainsi qu'une étape nécessaire si on veut développer dans le cadre des I.V. des méthodes numériques permettant de suivre des branches de solutions par continuation. L'utilisation des outils introduits dans cette partie pour décrire localement les branches de solutions sera développée dans la deuxième et la troisième partie qui constituent également une justification a posteriori de la méthode utilisée ici .

I. HYPOTHESES ET NOTATIONS

On considère la forme a bilinéaire, symétrique, (pour simplifier) continue coercive sur $H_0^1(\Omega)$ suivante :

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx, \quad \text{les } a_{ij}(x)$$

étant des coefficients réguliers, et Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^n . On appelle A l'opérateur du second ordre sous forme divergentielle associé à a :

$$A = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \right]$$

Soit ψ (l'obstacle) une fonction $\neq 0$, $\psi \in L_+^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ qu'on supposera ultérieurement quasi-continue (i.e. on remplace au besoin ψ par son unique représentant q.c. dans $H^1(\Omega)$) pour pouvoir expliciter les cônes de déplacements admissibles qui vont intervenir dans la suite.

Enfin, on se donne une fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ non décroissante, telle que $t \rightarrow f(x,t)$ soit dérivable deux fois en t, f, f_t, f_{tt} étant de Carathéodory sur $\Omega \times \mathbb{R}$ et on notera F, F_u, \dots les opérateurs de Nemytskii associés à f, f_t, \dots , lorsqu'on substitue une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ à t.

On suppose que f, f_t, f_{tt} sont bornées sur les ensembles $\Omega \times (-\infty, \beta]$, $\beta \in \mathbb{R}$, ce qui implique que F et F_u sont continus de $L^\infty(\Omega)$ dans $L^p(\Omega) \forall p > 1$ et que $(F(u+h)|w) - (F(u)|w) = (F_u(u)h|w) + O(\|h\|^2)\|w\|$ où $(\cdot|\cdot)$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ et $\|\cdot\|$ la norme usuelle dans $H_0^1(\Omega)$. La relation ci-dessus, largement utilisée dans la suite est valable si $u, h \in H_0^1(\Omega)$, $u(x), u(x) + h(x) \leq \beta$ pour un $\beta \in \mathbb{R}$, et si $\int_{\Omega} h^2(x) |w(x)| dx \leq \|h\|_q^2 \|w\|_q \leq C \|h\|^2 \|w\|$ ce qui est vrai si $\frac{3}{q} \leq 1$ et $H^1 \hookrightarrow L^q$, donc pour $n \leq 6$.

Le problème d'obstacle associé à $A - \lambda F$ et ψ que nous considérons est le suivant, sous forme variationnelle :

$$(I.1) \begin{cases} a(u, w-u) \geq \lambda(F(u) | w-u) \\ u \in K ; \forall w \in K = \{w \in H_0^1(\Omega) / w \leq \psi \text{ pp sur } \Omega\} \end{cases}$$

Le paramètre λ est ≥ 0 . On dira que u est une solution équation si, de plus, u vérifie :

$$(I.2) \begin{cases} a(u, w) = \lambda(F(u) | w) \\ u \in H_0^1(\Omega) ; \forall w \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

(c'est à dire que u vérifie $A u = \lambda F(u)$ et $u \leq \psi$)

Enfin, nous adopterons la notation suivante :

Si $u \in K$, K_u désigne le cône des déplacements admissibles dans K à partir de u :

$$K_u = \{ w \in H_0^1(\Omega) / \exists \mu > 0 : u + \mu w \in K \} = \bigcup_{\mu > 0} \mu \{K - u\}$$

et \bar{K}_u désigne l'adhérence de K_u dans $H_0^1(\Omega)$ fort.

Remarques :

1. l' I.V (I.1) s'écrit de manière équivalente :

$$\begin{cases} a(u, z) \geq \lambda(F(u) | z) \\ u \in K ; \forall z \in \bar{K}_u \end{cases}$$

2. Puisque K est un convexe fermé, héréditaire vers le bas et sup-stable, il existe ([8]) $\tilde{\psi}$ quasi-semi continue inférieurement (q. s.c.i) telle que $K = \{ w \in H_0^1(\Omega) / w \leq \tilde{\psi} \text{ q.p} \}$. Mais si ψ est quasi-continue et si on prend les représentants quasi-continus dans $H_0^1(\Omega)$:

$$\{u \leq \psi \text{ p.p}\} \iff \{u \leq \psi \text{ q.p}\} \quad ([1])$$

donc $\psi = \tilde{\psi}$, $K = \{w \in H_0^1(\Omega) / w \leq \psi \text{ q.p}\}$ et

$$\bar{K}_u = \{w \in H_0^1(\Omega) / w \leq 0 \text{ q.p sur } \{u = \psi\}\} \quad ([66]) \text{ étant entendu que pour}$$

u, ψ quasi-continus, $\{u = \psi\}$ est défini à un ensemble de capacité nulle près.

II. EXISTENCE D'UNE BRANCHE DE SOLUTIONS

II.1. Existence d'un continuum de solutions

Soit P_K le a -projecteur sur le cône convexe fermé K de $H^1_0(\Omega)$:
 $\forall x \in H^1_0(\Omega)$, $P_K(x)$ est caractérisé par ([49]) :

$$\begin{cases} a(x - P_K(x), x - P_K(x)) \leq a(x - y, x - y) \\ \forall y \in K ; P_K(x) \in K \end{cases}$$

Si G désigne l'opérateur de Green de $L^2(\Omega) \rightarrow H^1_0(\Omega)$ associé à A avec conditions de Dirichlet, l'I.V (I.1) est équivalente à la formulation point fixe suivante :

$$(II.1) \quad u = P_K [\lambda G F(u)] = T(\lambda, u)$$

L'application $T : R_+ \times H^1_0(\Omega) \rightarrow H^1_0(\Omega)$ est continue et compacte, ce qui permet d'appliquer un résultat standard de Rabinowitz ([72]) :

on a dans $R_+ \times H^1_0(\Omega)$ existence d'un continuum de solutions (λ, u) contenant $(0, 0)$. En considérant T comme agissant de $R_+ \times L^2(\Omega)$ dans lui-même, on voit que la projection de ce continuum sur R_+ est R_+ tout entier (d'où en particulier existence pour tout $\lambda > 0$).

On vérifie que toute solution u de (I.1) est ≥ 0 et par des résultats standard ([20] [62]) si $A\psi$ est une mesure telle que $(A\psi)^- \in L^p(\Omega) \forall p > 1$ alors $u \in W^{2,p}(\Omega) \forall p > 1$ (car $F(u) \in L^p(\Omega)$, $\forall p > 1$).

Pour la démonstration des propriétés de T , il suffit de remarquer que si u_n est une suite bornée ou convergente dans $H^1_0(\Omega)$ alors (après éventuellement une extraction) $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$. Puisque $|f(x, t)| < C_1 + C_2 t$ (quitte à modifier f lorsque $t \notin [0, |\psi|_\infty]$), F est continue de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et $GF(u_n) \rightarrow GF(u)$ dans $H^1_0(\Omega)$.

□

Remarque : en considérant le schéma itératif (monotone) suivant :

$$\begin{cases} a(u^{k+1}, w-u^{k+1}) \geq \lambda(F(u^k) | w-u^{k+1}) \\ \forall w \in K ; u^{k+1} \in K \\ u_0 = 0 \text{ (resp } u^0 = \psi) \end{cases}$$

on démontre l'existence d'une solution minimale $\underline{u}(\lambda)$ (resp. maximale $\bar{u}(\lambda)$) à l'I.V (I.1) et l'application $\lambda \rightarrow \underline{u}(\lambda, x)$ (resp. $\lambda \rightarrow \bar{u}(\lambda, x)$) est croissante pour presque tout $x \in \Omega$.

II.2. Branche équation - Branche inéquation

Si $\psi > 0$ est continue sur Ω , toute solution u de (I.1) est, pour λ assez petit, une solution équation. Si au contraire, $f \geq m > 0$ sur $\Omega \times \mathbb{R}$ on a, u et ψ étant assez réguliers, mes $\{u = \psi\} > 0$ pour λ assez grand et il n'y a plus de solution équation au moins lorsque $A\psi + \lambda F(\psi) \neq 0$ p.p. On peut d'ailleurs, en étendant un résultat de [39], donner une estimation de l'ensemble de coïncidence $\{u = \psi\}$ avec u, ψ réguliers de sorte que la définition de cet ensemble ne pose pas de problème. On se limite à un opérateur A à coefficients constants pour ne pas alourdir les calculs.

Proposition II.1 : on suppose que $\psi \in W_+^{2,p}(\Omega)$. Soit $u \in C^1(\bar{\Omega})$ la solution de l'I.V (I.1) pour λ fixé et $\Omega_0 = \{x \in \Omega / u(x) = \psi(x)\}$ où on a au besoin remplacé ψ par son représentant continu. On suppose aussi que $\gamma(\lambda) = \inf \{ -A\psi(x) + \lambda f(x, t) / x \in \Omega, t \in \mathbb{R} \} > 0$ et on pose :

$$\alpha = \frac{\gamma(\lambda)}{\sum_{i,j} a_{ij}} > 0. \text{ Alors } \Omega_0 \supset \left\{ x_0 \in \Omega / d(x_0, \partial\Omega) > \frac{|\psi|_{L^\infty(\partial\Omega)}^{1/2}}{\alpha^{1/2}} \right\}$$

Corollaire II.2 : avec les mêmes hypothèses, si

$\gamma(\lambda) \cdot \tilde{R}(\Omega)^2 \geq \sum a_{ij} |\psi|_{L^\infty(\partial\Omega)}$ où $B(\tilde{x}, \tilde{R}) \subset \Omega$ pour un $\tilde{x} \in \Omega$ alors Ω_0 est non vide, ce qui aura toujours lieu pour λ assez grand lorsque $f(x, t) \geq m > 0$,
 preuve du corollaire : comme $B(\tilde{x}, \tilde{R}) \subset \Omega$, on a $d(\tilde{x}, \partial\Omega) \geq \tilde{R} \geq \frac{|\psi|_{L^\infty(\partial\Omega)}^{1/2}}{\alpha^{1/2}}$
 donc $\tilde{x} \in \Omega_0$. Lorsque $f(x, t) \geq m > 0$, $\gamma(\lambda) \geq m\lambda - \sup \{A\psi(x) / x \in \Omega\}$ tend vers $+\infty$.

□

preuve de la proposition II.1 :

on pose $\tilde{u}(x) = \psi(x) - \beta |x - x_0|_2^2$, $\beta > 0$ (norme euclidienne dans R^n)
et on va montrer que, pour β , x_0 bien choisis, $\tilde{u}(x) \leq u(x)$ sur Ω . Comme
 $\tilde{u}(x_0) = \psi(x_0)$, on aura $x_0 \in \Omega$! Ecrivons l'équation vérifiée par \tilde{u} :

$$A\tilde{u} = A\psi + \beta \sum_{i,j} a_{ij} \quad \text{donc } \tilde{u} \text{ vérifie :}$$

$$(II.2) \quad a(\tilde{u}, z) = (A\tilde{u}, z) = \int_{\Omega} [A\psi + \beta \sum a_{ij}] z \, dx \quad \forall z \in H_0^1(\Omega)$$

Quant à u , il vérifie (II.1) ou (I.1) :

$$(II.1) \quad a(u, v-u) \geq \lambda(F(u)|v-u) \quad \forall v \in K.$$

Soit $z = (u-\tilde{u})_-$. On a $z \in H_0^1(\Omega)$ pourvu que $\tilde{u}(x) \leq 0$ sur $\partial\Omega$, ce qui a lieu si $|x - x_0|_2^2 > \frac{\psi(x)}{\beta}$ sur $\partial\Omega$, donc sûrement si $d(x_0, \partial\Omega) > \frac{|\psi|_{L^\infty(\partial\Omega)}^{1/2}}{\beta^{1/2}}$

On choisit $z = (u-\tilde{u})_-$ dans (II.2). Dans (II.1) on prend $v = u + (u-\tilde{u})_-$ qui est dans K puisque $\tilde{u}(x) \leq \psi(x)$ p.p et on fait la différence entre (II.1) et (II.2) :

$$a(u-\tilde{u}, (u-\tilde{u})_-) \geq \int_{\Omega} [\lambda F(u) - A\psi - \beta \sum a_{ij}] (u-\tilde{u})_- \, dx$$

qui donne bien $(u-\tilde{u})_- = 0$ i.e $u(x) \geq \tilde{u}(x)$ p.p pourvu que
 $\lambda F(u) - A\psi - \beta \sum a_{ij} > 0$ (noter que $\sum a_{ij}$ est > 0 par l'ellipticité) donc
si $\beta \leq \inf \{ \lambda F(u)(x) - A\psi(x), x \in \Omega \} / \sum a_{ij}$ et a fortiori si
 $\beta \leq \alpha = \inf \{ \lambda f(x,t) - A\psi(x); x \in \Omega, t \in R \} / \sum a_{ij}$ avec la condition $\beta > 0$

□

Il existe par conséquent en général des points (λ_*, u_*) réalisant une transition entre une branche équation et une branche inéquation du problème (I.1). Cette situation est représentée sur la fig. 1 :

On s'intéresse d'une part à ces points de transition. D'autre part, une étude numérique du problème d'obstacle avec $A = -\Delta$, $f(x,t) = e^t$, $\psi \equiv a > 0$ en géométrie sphérique dans R^n a montré (Chapitre IV) qu' on obtenait, sous certaines conditions, des retournements sur la branche inéquation : on cherche également à caractériser ces points singuliers .

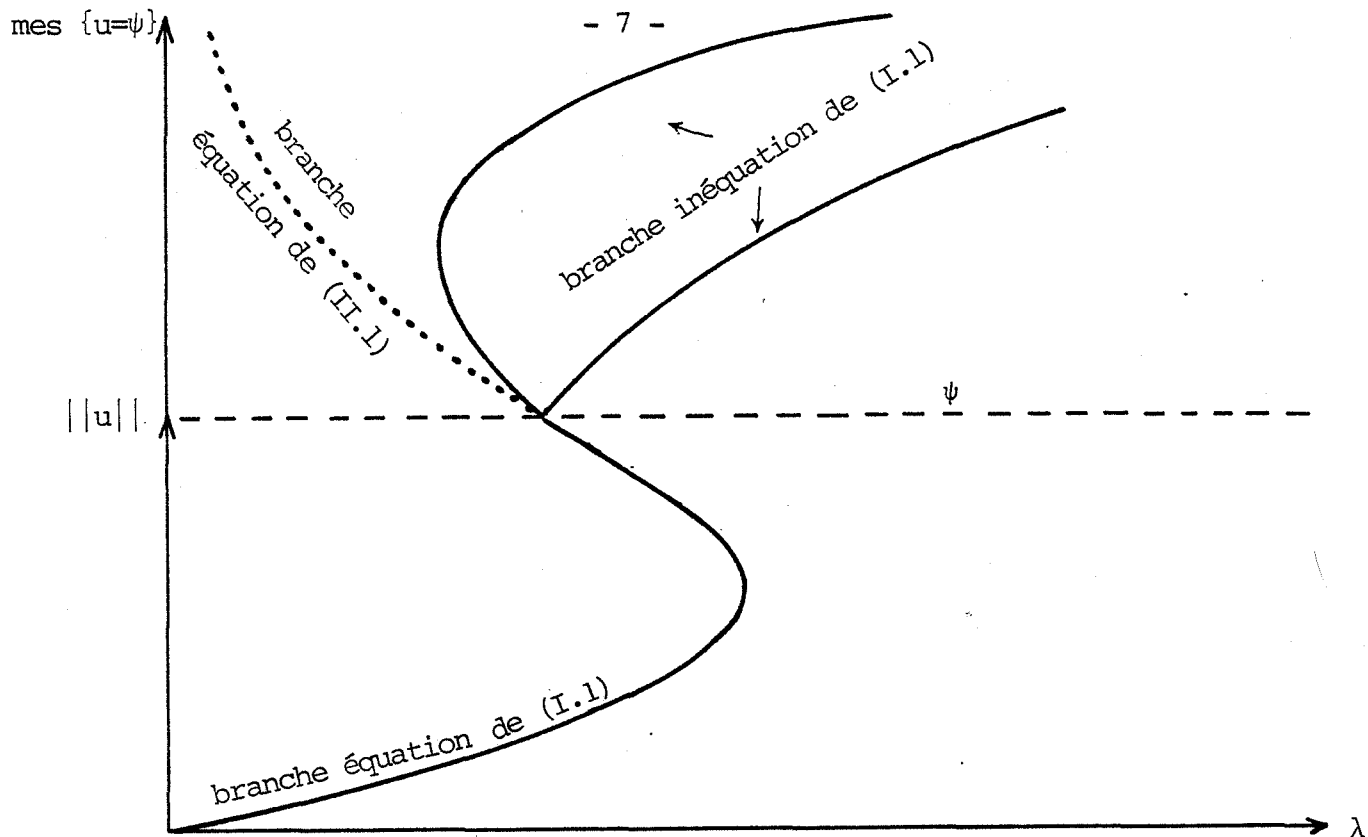


Fig. 1 : Diagramme de bifurcation usuel pour l'I.V (I.1)

III. POINTS SINGULIERS DE L'I.V.

III.1. Aspect inéquation

Soit (λ_*, u_*) une solution de (I.1). On note $\{u_* - \lambda_* G F(u_*)\}^\perp$ le a -orthogonal de $u_* - \lambda_* G F(u_*)$ c'est à dire l'ensemble :

$\{w \in H_0^1(\Omega) / a(u_*, w) = \lambda (F(u_*) | w)\}$. Lorsque cet orthogonal est $H_0^1(\Omega)$ tout entier, u est une solution équation.

On pose enfin $S_{u_*} = \bar{K}_{u_*} \cap \{u_* - \lambda_* G F(u_*)\}^\perp$.

Si $S_{u_*} = \bar{K}_{u_*} = H_0^1(\Omega)$, le travail généralise l'étude classique des points singuliers dans les équations. Si $S_{u_*} = \bar{K}_{u_*}$ a priori distinct de $H_0^1(\Omega)$, on retombe sur le cas particulier des points de transition entre les branches équation et I.V.

Définition III.1 : soit (λ_*, u_*) une solution de (I.1). L'inéquation :

$$(III.1) \quad \begin{cases} a(z, h-z) \geq \lambda_* (F'(u_*) z | h-z) \\ \forall h \in S_{u_*} ; z \in S_{u_*} \end{cases}$$

s'appelle conifiée de l' I.V (I.1) en (u_*, λ_*) selon u.

On remarque que $z = 0$ est toujours solution de (III.1) et que l'ensemble des solutions forme un cône fermé dans $H_0^1(\Omega)$. D'autre part z est solution de (III.1) si et seulement si $-z$ est solution de (III.1)_{bis} (même problème que (III.1) mais S_{u_*} est remplacé par $-S_{u_*}$).

Définition III.2 : Si (III.1) admet au moins une solution $z \neq 0$, on dira que (λ_*, u_*) est un point singulier.

Remarque : on pose $v(\lambda) = \inf \{a(z, z) - \lambda(F'(u_*)z|z)/z \in S_{u_*}; |z|_2 = 1\}$; on a $v(\lambda) \geq \mu(\lambda)$ où $\mu(\lambda)$ est la valeur propre fondamentale du linéarisé de l'équation en u_* , $v(\lambda)$ est décroissante en λ et on appelle valeur conique fondamentale la plus petite valeur λ_1 , si elle existe, telle que $v(\lambda_1) = 0$. Si $\lambda_* = \lambda_1$, (λ_*, u_*) est singulier. Si $F'(u_*) > 0$, $\lambda_1 = \inf \{ \frac{a(z, z)}{(F'(u_*)z|z)} / z \in S_{u_*}, |z|_2 = 1 \} = \inf \{ \frac{a(z, z)}{(F'(u_*)z|z)} / z \in S_{u_*}, z \neq 0 \}$. Dans ce cas $\lambda_* < \lambda_1$ implique que (λ_*, u_*) est régulier.

III.2. Aspect opérateur non linéaire

L'inéquation (III.1) peut encore s'écrire :

$$\begin{cases} a(z, h-z) \geq \lambda_* a(GF'(u_*)z, h-z) \\ \forall h \in S_{u_*}; z \in S_{u_*} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} a(\lambda_* GF'(u_*)z - z, h-z) \leq 0 \\ \forall h \in S_{u_*}; z \in S_{u_*} \end{cases} \iff$$

$$(III.2) \quad z = \lambda_* P_{S_{u_*}} [G F'(u_*)z]$$

où $P_{S_{u_*}}$ représente la a-projection sur le cône convexe fermé S_{u_*}

Remarque : l'inéquation (I.1) de départ s'écrit aussi, on l'a vu, sous la forme : $u = P_K [\lambda G F(u)]$ (II.1) où P_K est la a-projection sur le convexe fermé K et (III.2) s'obtient formellement à partir de (II.1) par dérivation conique au sens des projecteurs en $u_* = P_K [\lambda_* GF(u_*)]$ dans la direction $\lambda_* GF'(u_*)z$ ([66]) ou encore (III.2) représente la dérivation (composée) en $t = 0$ de l'équation (II.1) écrite pour $u_* + tz, \lambda_*$ ([49]).

Sous la forme (III.2) on est ramené au problème spectral suivant : trouver $(\lambda, z) \in \mathbb{R} \times H_O^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tels que :
 $z = \lambda P_{S_{u_*}} [G F'(u_*) z] = \lambda T(z)$, les λ s'appelant les valeurs caractéristiques coniques de T . Si λ_* est une telle valeur, (λ_*, u_*) est un point singulier.

Remarquons que $T : H_O^1(\Omega) \rightarrow S_{u_*}$ est, avec les hypothèses de régularité sur a et F , continu, compact, mais non linéaire. Cependant :

Lemme III.1 : T est un opérateur positivement homogène et positif.

preuve : seule la positivité est non triviale. Soit $y \in H_O^1(\Omega)$, $y \geq 0$ p.p., $z = T_y$ vérifie :

$$(III.3) \quad \begin{cases} a(z, w-z) \geq \lambda_* (F'(u_*) y | w-z) \\ \forall w \in S_{u_*} ; z \in S_{u_*} \end{cases}$$

Soit $w \in S_{u_*} \subset \bar{K}_{u_*} = \{w \in H_O^1(\Omega) / w \leq 0 \text{ q.p sur } \{u_* = \psi\}\}$ qui est stable pour l'opération \sup (cf. [66]) donc $w_+ \in \bar{K}_{u_*}$ i.e $w_+ \leq 0$ q.p sur $\{u_* = \psi\}$.

D'autre part, puisque w_+ est ≥ 0 pp sur Ω donc q.p sur Ω , on a aussi $w_+ \geq 0$ q.p sur $\{u_* = \psi\}$ fermé $\subset \Omega$ ([3]) i.e $w_+ \in -\bar{K}_{u_*}$.

Si on fait $h = \pm w_+$ dans l' I.V (I.1) écrite sous la forme équivalente :
 $a(u_*, h) \geq \lambda_* (F(u_*) | h) \quad \forall h \in \bar{K}_{u_*}$, on obtient :

$$a(u_*, w_+) = \lambda_* (F(u_*) | w_+) \Rightarrow w_+ \in \{u_* - \lambda_* G F(u_*)\}^\perp$$

Donc $w_+ \in S_{u_*}$ et on peut choisir $w = z_+$ dans (III.3), $z = T_y$:

$$-a(z_-, z_-) \geq \lambda_* (F'(u_*) y | z_-) \geq 0 \Rightarrow z_- = 0$$

donc $y \geq 0$ pp $\Rightarrow T_y \geq 0$ pp sur Ω

□

On est ramené ainsi à l'étude spectrale pour un opérateur
 $T : H_O^1(\Omega) \rightarrow H_O^1(\Omega)$ continu compact, ≥ 0 , ≥ 0 homogène mais on ignore si une théorie à la Perron-Frobenius existe dans ce cadre.

III.3. Interprétation géométrique

Soit (λ_*, u_*) une solution de (I.1). On suppose qu'il existe (λ_n, u_n) solution de (I.1) avec $\lambda_n \rightarrow \lambda, u_n \rightarrow u, ||u_n - u|| \neq 0$ (ceci est vrai pour les solutions maximales par exemple, continues à droite cf. deuxième partie).

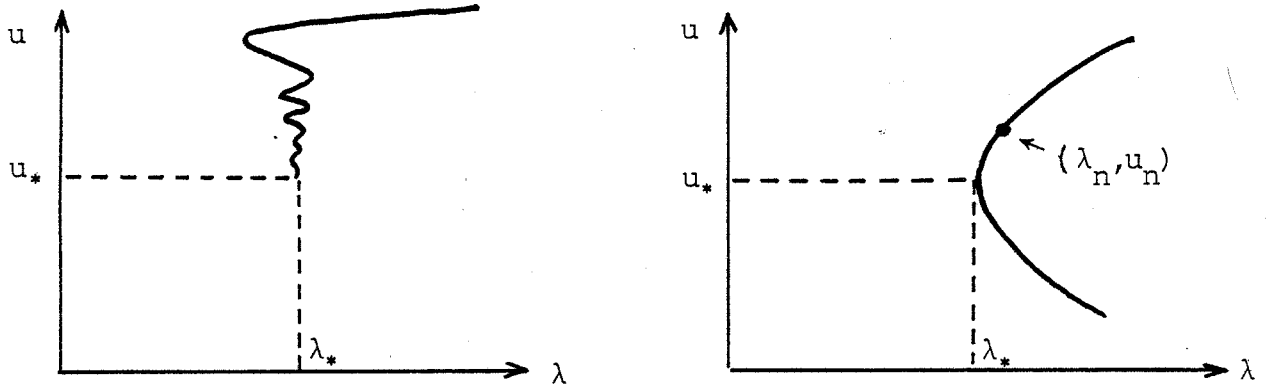


Figure 2

La figure 2 ci-dessus schématise des cas où (λ_*, u_*) sera sûrement singulier, ce qu'on peut formaliser :

Théorème III.1 : On suppose qu'il existe (modulo extraction) une suite (λ_n, u_n) telle que $|\lambda_n - \lambda_*| = o(||u_n - u_*||)$. Alors (λ_*, u_*) est un point singulier de l'I.V (I.1) au sens de la définition III.2.

Preuve :

étape 1 : . On pose $z_n = \frac{u_n - u_*}{||u_n - u_*||}$ qui est borné dans $H_0^1(\Omega)$.

Après éventuellement une extraction, $z_n \rightarrow z$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible, $L^2(\Omega)$ fort et p.p.

Comme $u_n = u_* + ||u_n - u_*|| z_n \in K$, $z_n \in Ku_*$ et $z \in \bar{Ku}_*$ puisque tout convexe fermé est faiblement fermé.

. On écrit ensuite (I.1) : $a(u_*, w - u_*) \geq \lambda_* (F(u_*) | w - u_*)$ avec $w = u_n$ et on divise par $||u_n - u_*||$:

$a(u_*, z_n) \geq \lambda_* (F(u_*) | z_n)$ et on passe à la limite en utilisant le fait que a définit une norme équivalente sur $H_0^1(\Omega)$ à la norme $|| \cdot ||$ usuelle :

$$a(u_*, z) \geq \lambda_* (F(u_*) | z)$$

. On écrit enfin (I.1) en (λ_n, u_n) :

$a(u_n, w - u_n) \geq \lambda_n (F(u_n) | (w - u_n))$, on fait $w = u_*$, et on passe à la limite :

$$a(u_*, z) \leq \lambda_* (F(u_*) | z) \implies$$

$$a(u_*, z) = \lambda_* (F(u_*) | z) \implies$$

$$z \in \{u_* - \lambda_* G F(u_*)\}^\perp$$

On a montré que le z ainsi défini est dans s_{u_*}

étape 2 : On montre que z est $\neq 0$ et vérifie l' I.V (III.1).

On considère les inéquations donnant u_* et u_n :

$$\begin{cases} a(u_*, w - u_*) \geq \lambda_* (F(u_*) | w - u_*) \\ a(u_n, w - u_n) \geq \lambda_n (F(u_n) | w - u_n) \\ \forall w \in K ; u_* \in K ; u_n \in K \end{cases}$$

. On prend $w = u_n$ (resp. $w = u_*$) et on fait la somme :

$$\begin{aligned} a(u_n - u_*, u_n - u_*) &\leq \lambda_* (F(u_n) - F(u_*) | u_n - u_*) \\ &\quad + (\lambda_n - \lambda_*) (F(u_n) | u_n - u_*) \end{aligned}$$

On développe $F(u_n)$ par Taylor autour de u_* , on divise par $\|u_n - u_*\|^2$ et on passe à la limite en utilisant la s.c.i faible de $a(.,.)$:

$$a(z, z) \leq \liminf a(z_n, z_n) \leq \lambda_* (F'(u_*) z | z)$$

Comme $a(z_n, z_n) \geq \alpha \|z_n\|^2 = \alpha > 0$ on a en particulier $(F'(u_*) z | z) \neq 0$ donc $z \neq 0$.

. On prend $w = u_* + \varepsilon h$, $h \in K_{u_*} \cap \{u_* - \lambda_* G F(u_*)\}^\perp$, $\varepsilon > 0$ dans les deux inéquations donnant u_* et u_n et on fait la différence :

$$\begin{cases} a(u_*, \varepsilon h) = \lambda_* (F(u_*) | \varepsilon h) \\ a(u_n, u_* - u_n) + a(u_n, \varepsilon h) \geq \lambda_n (F(u_n) | u_* - u_n) + \lambda_n (F(u_n) | \varepsilon h) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a(u_n - u_*, \varepsilon h) + a(u_n, u_* - u_n) \geq \lambda_n (F(u_n) | u_* - u_n) + (\lambda_n - \lambda_*) (F(u_n) | \varepsilon h) + \lambda_* (F(u_n) - F(u_*) | \varepsilon h)$$

On divise par $\|u_n - u_*\|$ et on passe à la limite :

$$a(z, \varepsilon h) + a(u_*, z) \geq \lambda_* (F(u_*) | z) + \lambda_* (F'(u_*) z | \varepsilon h)$$

et puisque $z \in \{u_* - \lambda_* G F(u_*)\}^\perp$:

$$\begin{cases} a(z, \varepsilon h) \geq \lambda_* (F'(u_*) z | \varepsilon h) \Rightarrow a(z, h) \geq \lambda_* (F'(u_*) z | h) \\ \forall h \in K_{u_*} \cap \{u_* - \lambda_* G F(u_*)\}^\perp \end{cases}$$

Mais ([66]) ce dernier ensemble est dense dans $S_{u_*} = \bar{K}_{u_*} \cap \{u_* - \lambda_* G F(u_*)\}^\perp$. Conclusion : z vérifie

$$\begin{cases} a(z, z) \leq \lambda_* (F'(u_*) z | z) \\ a(z, h) \geq \lambda_* (F'(u_*) z | h) \\ \forall h \in S_{u_*} ; z \neq 0 ; z \in S_{u_*} \end{cases}$$

ce qui équivaut à (III.1) avec $z \neq 0$

□

IV. POINTS REGULIERS. CALCUL DES DERIVEES CONIQUES

Tant qu'on évolue sur la branche équation, on peut calculer les solutions par une méthode de continuation, aux points réguliers en considérant le linéarisé de (I.2) et même aux points singuliers ([56]). On aimerait faire la même chose pour l'I.V (I.1): calcul de la branche inéquation, en partant par exemple du point de transition, ou, peut-être mieux de $\lambda = +\infty$ (on est à peu près assuré de partir d'une solution stable... en un sens qui reste à définir). Pour cela, il faut connaître " $\frac{du}{d\lambda}$ " là où c'est possible (en tous les points réguliers serait l'idéal!)) et se "débrouiller" pour passer les points singuliers les

plus courants en essayant d'adapter les techniques des équations ([37]), ce qui sera pour l'essentiel abordé dans les parties deux et trois.

IV.1. Définition du tangentiel conique

Soit (λ_*, u_*) une solution de (I.1), non singulière. On peut supposer pour simplifier qu'on a dans $R_+ \times H_0^1(\Omega)$ une branche de solutions $(\lambda, u(\lambda))$ passant par (λ_*, u_*) , localement continue au moins d'un côté ($\lambda > \lambda_*$ ou $\lambda < \lambda_*$) et telle que $\|u(\lambda) - u(\lambda_*)\| \neq 0$ pour $\lambda \neq \lambda_*$, $|\lambda - \lambda_*|$ petit cf. 2^e partie, branche maximale ou minimale). Plus généralement, pour toute séquence (λ_n, u_n) de solutions de (I.1) telle que $\lambda_n \rightarrow \lambda_*, u_n \rightarrow u_*$ (*) on pose $z_n = \frac{u_n - u_*}{\lambda_n - \lambda_*}$ ce qui est possible modulo élimination d'un nombre fini de λ_n puisque $\lambda_n - \lambda_* \neq 0$ (sinon d'après le théorème (III.1) (λ_*, u_*) serait singulier).

On peut supposer, après une extraction éventuelle, que $\lambda_n > \lambda_*$ ou $\lambda_n < \lambda_*$ pour tout n.

Après extraction éventuelle d'une nouvelle suite, on peut poser :

$$\begin{aligned} z_+ &= \lim z_n \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible (et } L^2(\Omega) \text{ fort et p.p) si } \lambda_n > \lambda_* \text{ et} \\ z_- &= \lim z_n (\dots) \text{ si } \lambda_n < \lambda_*. \end{aligned}$$

Définition IV.1 : L'ensemble T_+ (resp. T_-) des z_+ (resp z_-) lorsqu'il n'est pas vide s'appelle ensemble des dérivées coniques de u selon λ en (u_*, λ_*) à droite (resp. à gauche).

Remarquons que (λ_*, u_*) étant non singulier, toute suite (λ_n, u_n) solution de (I.1) est telle que, pour n assez grand, $\frac{u_n - u_*}{\lambda_n - \lambda_*}$ est nécessairement borné (par l'absurde, sinon cf. théorème (III.1)) , donc il existe au moins une suite $z_n \rightarrow z$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible, $L^2(\Omega)$ fort et p.p : T_+ ou T_- au moins est non vide.

(*) Pour l'existence d'une telle suite, cf. les résultats obtenus par le degré topologique dans la troisième partie.

IV.2. Détermination des directions coniquement tangentes

Théorème IV.1 : Soit (λ_*, u_*) un point non singulier.

Tout élément $z_+ \in T_+$ est solution de 1' I.V :

$$(IV.1) \begin{cases} a(z_+, h - z_+) \geq \lambda_* (F'(u_*) | z_+ | h - z_+) + (F(u_*) | h - z_+) \\ \forall h \in S_{u_*} ; z_+ \in S_{u_*} \end{cases}$$

Tout élément $z_- \in T_-$ est solution de 1' I.V :

$$(IV.2) \begin{cases} a(z_-, h - z_-) \geq \lambda_* (F'(u_*) | z_- | h - z_-) + (F(u_*) | h - z_-) \\ \forall h \in -S_{u_*} ; z_- \in -S_{u_*} \end{cases}$$

preuve (pour $z_+ \in T_+$ par exemple) :

. On montre que $z_+ \in S_{u_*}$: de la relation $u_n = u_* + (\lambda_n - \lambda_*) z_n$ on déduit que $z_n \in K_{u_*}$ donc $z_+ = \lim \text{faible } z_n \in \text{adh. faible } (K_{u_*}) = \bar{K}_{u_*}$ puisque K_{u_*} est convexe.

On écrit ensuite que $a(u_*, w - u_*) \geq \lambda_* (F'(u_*) | w - u_*)$ avec $w = u_n \in K$, on divise par $\lambda_n - \lambda_* > 0$ et on passe à la limite :
 $a(u_*, z_+) \geq \lambda_* (F'(u_*) | z_+)$. Enfin on écrit que $a(u_n, w - u_n) \geq \lambda_n (F'(u_n) | w - u_n)$ avec $w = u_* \in K$, on divise par $\lambda_n - \lambda_* > 0$ et on passe à la limite :
 $a(u_*, z_+) \leq \lambda_* (F'(u_*) | z_+) \Rightarrow a(u_*, z_+) = \lambda_* (F'(u_*) | z_+) \Rightarrow z_+ \in \{u_* - \lambda_* GF(u_*)\}^\perp$

. On montre que z_+ vérifie l'inéquation (IV.1) ; en écrivant que (λ_n, u_n) et (λ_*, u_*) sont solution de (I.1) :

$$a(u_*, w - u_*) \geq \lambda_* (F'(u_*) | w - u_*)$$

$$a(u_n, w - u_n) \geq \lambda_n (F'(u_n) | w - u_n)$$

avec $w = u_n$, resp. $w = u_* + \varepsilon h$, $\varepsilon > 0$ assez petit,

$$h \in K_{u_*} \cap \{u_* - \lambda_* GF(u_*)\}^\perp$$

et on fait la somme :

$$\begin{aligned} a(u_n, \varepsilon h) + a(u_* - u_n, u_n - u_*) &\geq \lambda_n (F'(u_n) | \varepsilon h) - (\lambda_n - \lambda_*) (F'(u_*) | u_n - u_*) \\ &\quad - \lambda_n (F'(u_n) - F'(u_*) | u_n - u_*) \end{aligned}$$

a) avec $\varepsilon = 0$, en divisant par $(\lambda_n - \lambda_*)^2$ et en passant à la limite :

$$a(z_+, z_+) \leq \liminf a(z_n, z_n) \leq \lambda_* (F'(u_*) | z_+ | z_+) + (F(u_*) | z_+)$$

b) avec $\varepsilon > 0$ en divisant par $\lambda_n - \lambda_*$ et en utilisant la relation $a(u_*, \varepsilon h) = \lambda_* (F(u_*) | \varepsilon h)$:

$$a\left(\frac{u_n - u_*}{\lambda_n - \lambda_*}, \varepsilon h\right) + a(u_* - u_n, z_n) \geq \frac{1}{\lambda_n - \lambda_*} (\lambda_n F(u_n) - \lambda_* F(u_*) | \varepsilon h) - (F(u_*) | u_n - u_*) - \lambda_n (F(u_n) - F(u_*) | z_n) \text{ et en passant à la limite :}$$

$$a(z_+, \varepsilon h) \geq (F(u_*) | \varepsilon h) + \lambda_* (F'(u_*) | z_+ | \varepsilon h) \Rightarrow$$

$$a(z_+, h) \geq (F(u_*) | h) + \lambda_* (F'(u_*) | z_+ | h)$$

ce qui, avec la relation obtenue pour $h = z_+$ donne :

$$a(z_+, h - z_+) \geq \lambda_* (F'(u_*) | z_+ | h - z_+) + (F(u_*) | h - z_+)$$

$\forall h \in K_u \cap \{u_* - \lambda_* G F(u_*)\}^\perp$ et par densité $\forall h \in S_{u_*}$, ce qui donne exactement l' I.V (IV.1).

Pour établir la validité de (IV.2), on part de $u_n = u_* - (\lambda_* - \lambda_n) z_n$ avec $\lambda_* - \lambda_n > 0$ donc $-z_n \in K_u \Rightarrow -z_n \in \bar{K}_u$ et $-z_n \in S_u$. Ensuite, le reste de la preuve est inchangé dans a), mais dans b) la division par $\lambda_n - \lambda_*$ change le sens de l'inégalité ... qu'on rétablit en posant $h = -k$ avec $k \in -S_{u_*}$ \square

IV.3. Existence - unicité des dérivés coniques

En un point régulier, le théorème IV.1 prouve que (IV.1) et (IV.2) admettent au moins une solution $z_+(z_-) \neq 0$ si $(F(u_*) | h) \neq 0$ pour un h au moins dans S_{u_*} , mais on a utilisé une hypothèse de nature géométrique à savoir l'existence d'une suite $(\lambda_n, u_n) \rightarrow (\lambda_*, u_*)$. Or on aimerait justement utiliser les notions de dérivées coniques pour montrer l'existence locale de branches régulières passant par (λ_*, u_*) ! (*). Il faut donc savoir traiter (IV.1) (IV.2) sous des hypothèses purement analytiques et

(*) Travail qui, répétons le, sera réalisé dans les parties deux et trois .

ce qu'on voudrait avoir, c'est l'existence et l'unicité des solutions de (IV.1), (IV.2) aux points non singuliers.

On a pour le moment les résultats très partiels suivants, visiblement non optimaux. On suppose que $F'(u_*)$ est > 0 .

Proposition IV.2 : si $\inf \left\{ \frac{a(w,w)}{(F'(u_*)w|w)} / w \in Su_*, w \neq 0 \right\}$
(resp ... $w \in -Su_*$...) est $> \lambda_*$ alors λ_* est régulier et (IV.1)
(resp. IV.2) possède au moins une solution z_+ (resp. z_-).

Preuve : si λ_* était singulier, il existerait $z \in Su_*$, $z \neq 0$ tel que (III.1) soit vrai, d'où en particulier $a(z,z) = \lambda_* (F'(u_*) z|z)$ ce qui contredit l'hypothèse faite.

Pour l'existence, l'I.V (IV.1) par exemple s'écrit :

$$\begin{cases} b(z_+, h - z_+) = a(z_+, h - z_+) - \lambda_* (F'(u_*) z_+ | h - z_+) \geq (F(u_*) | h - z_+) \\ z_+ \in Su_* ; \forall h \in Su_* \end{cases}$$

$$\text{Soit } v = \inf \left\{ \frac{a(w,w)}{(F'(u_*)w|w)} / w \in Su_*, w \neq 0 \right\} > \lambda_*$$

$$b(w,w) \geq (1 - \frac{\lambda_*}{v}) a(w,w) \geq \alpha ||w||^2 \quad \forall w \in Su_* \text{ avec } \alpha > 0$$

$$\text{On pose } J(z) = \frac{1}{2} b(z,z) - (F(u_*) | z)$$

et $m = \inf_{z \in Su_*} J(z)$. Avec l'inégalité d'Young on a

$$\begin{aligned} J(z) &\geq \frac{\alpha}{2} ||z||^2 - (F(u_*) | z) \\ &\geq \frac{\alpha}{2} ||z||^2 - \frac{\alpha}{2} ||z||^2 - C(\alpha) |F(u_*)|^2 = -C(\alpha) |F(u_*)|^2 \end{aligned}$$

donc $m > -\infty$; soit z_n une suite minimisante.

Puisque $\lim_{z \in Su_*} J(z) = +\infty$, z_n est bornée, soit z une limite d'une suite

$$||z|| \rightarrow \infty$$

extraite, dans $H^1_0(\Omega)$ faible et $L^2(\Omega)$ fort (et p.p). Puisque la forme est faiblement s.c.i. on a :

$J(z) \leq \liminf J(z_n) = m$ donc z minimise J i.e. $(J'(z)|v-z) \geq 0$
 $\forall v \in Su_*$ ce qui est exactement l'inéquation (IV.1)

□

Remarques :

1. L'hypothèse de la proposition IV.2 est aussi celle qui garantit l'unicité locale pour l'I.V (I.1) à $\lambda = \lambda_*$ fixé.

2. Si on fait l'hypothèse plus restrictive suivante :

$\inf \left\{ \frac{a(w,w)}{(F'(u_*)w|w)} / w \in Su_* - Su_*, w \neq 0 \right\} > \lambda_*$ le résultat est conséquence immédiate de la monotonie de l'opérateur $B : Su_* \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ associé à la forme b (cf. aussi le th. 2.1 de Kinderlehrer-Stampacchia ([59]) qui s'adapte : la suite z_n de Cauchy converge toute entière vers z unique solution de (IV.1)).

La condition ci-dessus est actuellement celle qui permet d'avoir un résultat d'unicité pour les dérivées coniques (*).

Proposition IV.3 : si $\inf \left\{ \frac{a(w,w)}{(F'(u_*)w|w)} / w \in Su_* - Su_*, w \neq 0 \right\}$ est $> \lambda_*$ alors λ_* est régulier et (IV.1) (IV.2) admettent au plus une solution. D'après la proposition IV.2 on a existence et unicité pour (IV.1), (IV.2) dans ce cas.

Preuve : λ_* est évidemment régulier d'après la proposition IV.2. Pour vérifier l'unicité dans (IV.1) par exemple, on suppose qu'il y a deux solutions z_1 et z_2 , $z_1 \neq z_2$:

$$a(z_1, h - z_1) \geq \lambda_* (F'(u_*)z_1|h - z_1) + (F(u_*)|h - z_1)$$

$$a(z_2, h - z_2) \geq \lambda_* (F'(u_*)z_2|h - z_2) + (F(u_*)|h - z_2)$$

on prend $h = z_2$ dans la première équation, $h = z_1$ dans la deuxième et on fait la somme :

$a(z, z) \leq \lambda_* (F'(u_*)z|z)$ avec $z = z_1 - z_2 \in Su_* - Su_*$, $z \neq 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

□

(*) C'est aussi la condition qui permettra de faire l'étude locale .

Remarques

1. La proposition (IV.3) est vraie en particulier sous l'hypothèse plus restrictive : $\lambda_* < \inf \left\{ \frac{a(w,w)}{(F'(u_*)w|w)} / w \neq 0, w \in H^1_0(\Omega) \right\}$. Lorsque u_* est une solution équation, cette condition signifie *grosso-modo* que (λ_*, u_*) est situé avant le premier point de retournement de la branche (minimale) équation, dans des cas classiques.

2. Si $Su_* = \bar{K}u_*$ (point de transition équation - inéquation), $Su_* - Su_* = H^1_0(\Omega)$ car $u \in H^1_0(\Omega)$ s'écrit $u = u_+ - u_-$ avec $u_{\pm} \in H^1(\Omega)$, $u_{\pm} \geq 0$ p.p sur Ω donc aussi q.p sur Ω (cf. [62], annexe aux chapitres I et II par exemple) donc $u_+, u_- \in Su_*$ en particulier. L'interprétation de la condition d'unicité est la même que ci-dessus.

V. COMPLEMENTS.CAS PARTICULIERS

V.1. Problèmes sans obstacles (ou étude de branches équations dans les I.V).

Dans le cadre des branches équations, on retrouve des résultats standard : si $u < \psi$ quasi-partout, $Ku_* = H^1_0(\Omega)$ ([66]) et $Su_* = H^1_0(\Omega)$ ([62]) les inéquations (IV.1) et (IV.2) sont identiques et en un point régulier (λ_*, u_*) , i.e. quand λ_* n'est pas dans le spectre de l'opérateur A avec "poids" $F'(u_*)$, $z_+ = z_-$ est l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} A z_+ = \lambda_* F'(u_*) z_+ + F(u_*) \\ z_+ \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega) \end{cases}$$

il s'agit de la dérivée $\frac{du}{d\lambda}$ bi-latérale ordinaire donnée par le théorème des fonctions implicites.

V.2. Transition entre équation et inéquation dans une I.V. :

c'est la situation où (λ_*, u_*) vérifie l'équation, i.e.

$$\{u_* - \lambda_* G F(u_*)\}^\perp = H^1_0(\Omega) \text{ mais l'ensemble } \{u_* = \psi\} \\ (u, \psi \text{ q.c., cf. aussi [62]}) \text{ n'est pas forcément vide.}$$

Dans ce cas $Su_* = \bar{K}u_*$ est en général plus petit que $H^1_0(\Omega)$.

Définition V.1 : soit (λ_*, u_*) une solution équation de l' I.V (I.1). On dira que c'est un point de transition (équation-inéquation) si dans tout voisinage de (λ_*, u_*) dans $R \times H^1_0(\Omega)$ il existe (λ, u) solution de (I.1) avec $\|u - u_*\| \neq 0$, $\text{cap}\{u = \psi\} > 0$.

La capacité est prise ici au sens de la forme $a(.,.)$ (cf [3], [66]). On peut avoir $\text{cap}\{u_* = \psi\} > 0$ ou nul selon les cas (et la dimension). Pour avoir une véritable transition à partir d'une branche équation, on est amené à compléter la définition V.1 en supposant l'existence, dans tout voisinage de (λ_*, u_*) d'une solution (μ, v) de (I.2) avec $\text{cap}\{v = \psi\} = 0$.

La justification de la prise en compte des capacités, et non des mesures, dans la définition V.1, peut être illustrée par l'exemple simple suivant (fig. 3) :

$$A = -\Delta, \Omega =]-1, 1[, \psi(x) = 1 + |x|,$$

$f(x, t) \equiv 1$: l'obstacle est atteint pour $\lambda = 2$ qui est la transition au sens des capacités et l'inéquation devient effective à ce moment là, alors que la transition au sens des mesures correspondrait à $\lambda = 4$.

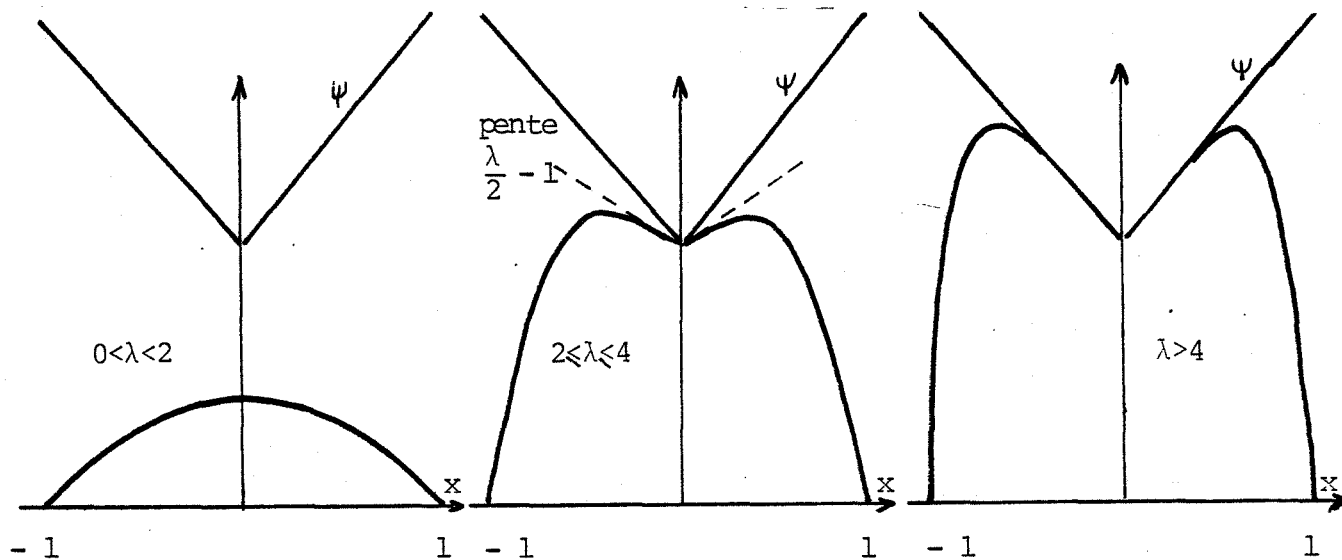


Fig.3 : Profil des solutions pour l' I.V : $(\Delta u + 1)(\psi - u) = 0$; $u \leq \psi$

Donnons maintenant la formulation particulière de la notion de point singulier ou régulier au niveau d'une transition équation-inéquation. Considérons d'abord l'I.V conifiée selon u :

$$(III.1) \begin{cases} a(z, w-z) \geq \lambda_* (F'(u_*) z | w-z) \\ \forall w \in \bar{K}u_* ; z \in \bar{K}u_* \end{cases}$$

avec $\bar{K}u_* = \{ w \in H_O^1(\Omega) / w \leq 0 \text{ q.p sur } \{u_* = \psi\} \} = \{ w \in H_O^1(\Omega) / w \leq 0 \text{ sur } \{u_* = \psi\} \text{ au sens de } H_O^1(\Omega) \}$ (cf. [3]) en prenant pour u_* et ψ des représentants quasi-continus, de sorte que $\{u_* = \psi\}$ est défini à un ensemble de capacité nulle près. En posant $E = \{u_* = \psi\}$, fermé $\subset \Omega$, (III.1) s'écrit :

$$\begin{cases} a(z, w-z) \geq \lambda_* (F'(u_*) z | w-z) \\ \forall w \in \bar{K}u_* = \{ w \in H_O^1(\Omega) / w \leq 0 \text{ sur } E \text{ au sens de } H_O^1(\Omega) \} \end{cases}$$

ce qu'on va pouvoir interpréter en adoptant les notations et la terminologie de [62] :

Pour z solution de (III.1) on définit d'abord $\Omega \setminus I(z) = \{ x \in \Omega / z(x) < 0 \text{ sur } E \text{ au sens de } H_O^1(\Omega) \}$ (cf. [62] avec $K = \bar{K}u_*$). Formellement, $I(z)$, nécessairement inclus dans E , est l'ensemble $\{ x \in E / z(x) = 0 \}$

Lorsque $z \in C(\bar{\Omega})$ $I(z) = \{ x \in E / z(x) = 0 \text{ au sens usuel} \}$. Avec ces notations et [62] l' I.V (III.1) s'interprète de la manière suivante :

$$- A z + \lambda_* F'(u_*) z = \mu$$

avec $z \in H_O^1(\Omega)$, $z \leq 0$ sur E au sens de $H_O^1(\Omega)$ et μ est une mesure ≥ 0 à support dans $I(z) \subset E$

Considérons alors le cas standard où, en entrant dans l'inéquation (*), l'ensemble de coïncidence est réduit à un point : on a $E = \{x_0\}$ et, dans ce cas si z est solution de (III.1) on a trois possibilités :

(*) En dimension > 1 , l'ensemble de coïncidence peut toutefois être beaucoup plus complexe .

1. $n > 1$ alors au sens des capacités $E = \{x_0\} = \emptyset$ donc $I(z) = \emptyset$ et z est solution du problème :

$$A z = \lambda_* F'(u_*) z \text{ dans } H^1_0(\Omega)$$

Il s'agit du problème spectral ordinaire pour les équations.

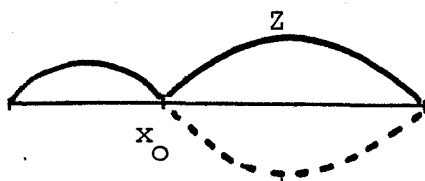
2. $n = 1$ mais $z(x_0)$ (qui a un sens pour $n=1$) est < 0 : $E = \{x_0\}$ au sens des capacités, mais $I(z) = \emptyset$ et, en ce qui concerne la recherche des valeurs propres coniques, il s'agit encore d'étudier le linéarisé usuel pour les équations. De même si $n > 1$ ou si $n = 1$ avec $z_+(x_0) < 0$ ou $z_-(x_0) > 0$, (IV.1) ou (IV.2) se ramènent à l'équation donnant, dans le cas régulier, les dérivées usuelles $\frac{du}{d\lambda}$:

$$\begin{cases} A z_+ = \lambda_* F'(u_*) z_+ + F(u_*) \\ z_+ \in H^1_0(\Omega) \end{cases}$$

3. $n = 1$ et $z(x_0) = 0$; alors $I(z) = \{x_0\}$, μ , mesure à support dans $I(z)$ est colinéaire à un Dirac en x_0 et, pour l' I.V (III.1) on a en fait :

$$\begin{cases} A z = \lambda_* F'(u_*) z \text{ sur } \Omega_* = \Omega \setminus \{x_0\} \\ z \in H^1_0(\Omega) ; z(x_0) = 0 \end{cases}$$

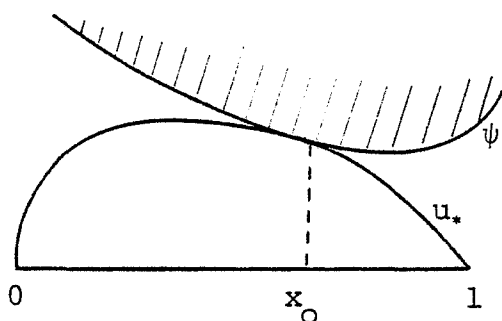
c'est à dire qu'il s'agit du problème de Dirichlet pour l'équation linéarisée dans Ω_* ; dans ce cas, la solution z n'est pas *a priori* dans



$w^{2,p}(\Omega)$ sinon $-Az + \lambda_* F'(u_*) z$ serait une mesure concentrée en x_0 et assimilable à une fonction de $L^p(\Omega)$, donc nulle!

Remarque 1 : il peut effectivement arriver, dans le cas 3 que la mesure μ soit non nulle, de sorte que toute solution z de (III.1) n'est pas nécessairement une fonction propre de l'équation linéarisée, ce qui prouve, s'il en était besoin, que l'ensemble des valeurs singulières coniques ne s'identifie pas au spectre usuel du linéarisé :

Exemple : $\Omega =]0,1[$, $A = -\Delta$, $f(x,t) \equiv t$: pour l'équation, les valeurs propres sont $\lambda_k = \pi^2 k^2$ avec les fonctions propres associées $\sin k\pi x$.



On peut toujours construire, étant donné $x_0 \notin \mathbb{Q}$, un obstacle ψ adapté pour que, avec $\lambda = \lambda_* = \frac{\pi^2 k^2}{x_0^2}$ on ait $\{u_* = \psi\} = \{x_0\}$ (ψ est construit *a posteriori*). Dans ce cas, si on prend $w = 0$ sur $]x_0,1[$ et $w(x) = \sin \frac{k\pi x}{x_0}$ sur $]0, x_0[$, $w \not\equiv 0$ est un vecteur propre

du linéarisé sur $\Omega_* =]0,1[\setminus \{x_0\}$ i.e de (III.1), mais la valeur conique singulière $\lambda_* = \frac{\pi^2 k^2}{x_0^2}$ ne peut être égale à un λ_k car $\frac{k}{x_0} \notin \mathbb{Z}$ (mais si $\frac{k}{x_0} \in \mathbb{Z}$ on a une valeur propre pour l'équation linéarisée donnant dans (III.1) une mesure μ non nulle !)

□

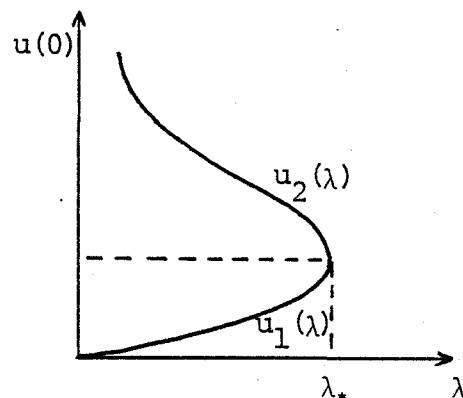
Remarque 2 : Lors d'une transition équation-inéquation, il se peut très bien que, pour l'équation linéarisée dans Ω on ait une valeur singulière, alors que pour l'équation linéarisée dans $\Omega \setminus \{x_0\}$, on n'en ait jamais.

Exemple : (en dimension 1, évidemment !)

Prenons le problème de Guelfand :

$$\begin{cases} u'' + \lambda e^u = 0 \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$

(cela marche avec une non-linéarité positive, croissante, convexe, telle que la branche se retourne une seule fois .

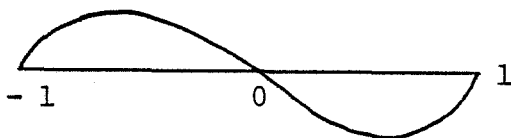


Soit $\mu_1(u)$ la valeur propre fondamentale du problème linéarisé :

$$\begin{cases} w'' + \mu e^u w = 0 \\ w(-1) = w(1) = 0 \end{cases}$$

u_1, u_2 désignent respectivement la solution basse et haute du problème ; on sait que pour $\lambda < \lambda_*$, $\lambda < \mu_1(u_1)$; au point de retournement $\lambda_* = \mu_1(u_*)$ et, puisqu'on a un seul retournement : $\mu_1(u_2) < \lambda < \mu_2(u_2)$ où μ_2 est la deuxième valeur propre du linéarisé.

Considérons maintenant un obstacle $\psi \equiv a, a > 0$ quelconque et calculons la valeur propre fondamentale v_1 au point de transition dans $\Omega \setminus \{x_0\}$ puisque $\{u = \psi\} = \{0\}$ on doit résoudre un problème de Dirichlet linéarisé dans $\Omega_* =]-1, 1[\setminus \{0\}$; on suppose que la transition a lieu sur la branche haute u_2 :



$$v_1 = \inf \left\{ \frac{(\nabla w | \nabla w)}{(F'(u_2)w | w)} / w \in H_O^1(\Omega_*), w \neq 0 \right\}$$

et, si on se limite à des solutions symétriques selon l'origine, on peut prendre w symétrique. Si ϕ_1 désigne la fonction propre fondamentale associée à $\mu_1(u_2)$, ϕ_1 est paire et

$$\begin{aligned} v_1 &= \inf \left\{ \frac{(\nabla w | \nabla w)}{(F'(u_2)w | w)} / w \in H_O^1(\Omega_*), w \text{ paire} \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{(\nabla w | w)}{(F'(u_2)w | w)} / w \in H_O^1(\Omega), w \text{ impaire} \right\} \\ &\geq \inf \left\{ \frac{(\nabla w | w)}{(F'(u_2)w | w)} / w \in H_O^1(\Omega), (w | \phi_1) = 0 \right\} = \mu_2(u_2) > \lambda \end{aligned}$$

Donc on a toujours $\lambda < v_1 = v_1(u_2)$ et le spectre conique est vide quel que soit a . Pour la branche basse u_1 on a évidemment

$$\lambda \leq \mu_1(u_1) < \mu_2(u_1) \leq v_1(u_1), \text{ c'est encore plus vrai !}$$

□

C'est ce qui explique qu'en dimension 1, par des essais numériques, on n'observe jamais de retournement sur la branche inéquation (on peut le démontrer d'ailleurs de manière simple) alors que pour $n > 1$ la situation est différente.

Toutefois il faut noter, dans l'exemple ci-dessus, que

$$\inf \left\{ \frac{(\nabla w | \nabla w)}{(F'(u_2)w | w)} / w \in H_O^1(\Omega) \right\} = \inf \left\{ \frac{(\nabla w | \nabla w)}{(F'(u_2)w | w)} / w \in \overline{K}_{u_*}, w \neq 0 \right\}$$

$\leq \lambda < v_1$ i.e les points de transition peuvent être singuliers vis à vis de l'I.V. (III.1) (en particulier au point de retournement (u_*, λ_*) de l'équation).

En résumé, en ce qui concerne les points de transition lorsque l'ensemble de contact est réduit à un point, on peut dire que, pour le calcul des directions coniques :

. pour $n > 1$, on a le comportement de l'équation dans Ω et on calcule les dérivées au sens usuel en dehors des singularités de l'équation (exemple : des retournements).

. pour $n = 1$, étant donné que u est en général croissante ponctuellement au passage équation-inéquation (cas des solutions maximales ou minimales) on cherche $Z_+ \geq 0$ ($Z_- \leq 0$) sur $\{u_* = \psi\}$, les inéquations (IV.1), (IV.2) se ramènent à résoudre le problème de Dirichlet usuel sur le complémentaire de l'ensemble de coïncidence pour les équations :

$$A Z = \lambda F'(u) Z + F(u).$$

Lorsque l'ensemble de contact $E = \{u = \psi\}$ non nécessairement réduit à un point, admet une frontière ∂E régulière (*), la solution ≥ 0 du problème de Dirichlet homogène (si elle existe) :

$$A Z = \lambda F'(u) Z + F(u) \text{ dans } \Omega \setminus E$$

prolongée par 0 sur E , fournit une direction conique Z_+ à droite au point de transition (λ, u) . En effet :

$$\begin{aligned} a(Z_+, w - Z_+) - \lambda (F'(u) Z_+ | w - Z_+) - (F(u) | w - Z_+) &= - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial Z}{\partial \nu_A} (w - Z_+) d\sigma \\ &- \int_E F(u) (w - Z_+) dx = - \int_E F(u) w dx - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial Z}{\partial \nu_A} w d\sigma \geq 0 \\ \text{si } w \in S_u \text{ car } F(u) \geq 0 \text{ et } \frac{\partial Z}{\partial \nu_A} &\geq 0. \end{aligned}$$

Mais en général, z n'est pas une direction conique à gauche.

cf. [24] , [27] ..

Cette situation est illustrée dans l'annexe jointe où on a calculé "à la main" les directions coniques sur quelques exemples simples, selon la dimension n , y compris en dehors des points de transition d'ailleurs.

V.3. Interprétation partielle du cas général

On suppose que (λ_*, u_*) est un point régulier et on se place dans la situation courante où une branche $(\lambda, u(\lambda))$ croissante en λ , passe par ce point (ce qui est vrai au moins pour la branche minimale ou maximale).

Soient Z_+ (resp Z_-) une direction conique de T_+ (resp. T_-).
On a $Z_+ \geq 0$ pp dans Ω donc q.p dans Ω donc $Z_+ \in -S_{u_*}$. Dans les (I.V) (IV.1) et (IV.2) donnant Z_+ et Z_- :

$$a(Z_+, h - Z_+) \geq \lambda_* (F'(u_*) Z_+ | h - Z_+) + (F(u_*) | h - Z_+) \quad \forall h \in S_{u_*}$$

$$a(Z_-, h - Z_-) \geq \lambda_* (F'(u_*) Z_- | h - Z_-) + (F(u_*) | h - Z_-) \quad \forall h \in -S_{u_*}$$

on prend $h = Z_+ + h$ (resp. $h = Z_- - h$), $h \in S_{u_*}$ et on fait la somme :

$$a(Z_+ - Z_-, h) \geq \lambda_* (F'(u_*) (Z_+ - Z_-) | h) \quad \forall h \in S_{u_*}$$

On suppose maintenant de plus que $z_- \in S_{u_*} \cap -S_{u_*}$.

Dans ce cas l'inégalité ci-dessus est valable pour $h = Z_+ - Z_- \in S_{u_*}$ et $h = Z_- - Z_+ \in S_{u_*}$ et s'écrit de manière équivalente :

$$\begin{cases} a(Z_+ - Z_-, h - (Z_+ - Z_-)) \geq \lambda_* (F'(u_*) (Z_+ - Z_-) | h - (Z_+ - Z_-)) \\ \forall h \in S_{u_*}, Z_+ - Z_- \in S_{u_*} \end{cases}$$

donc $Z_+ = Z_-$ puisque (λ_*, u_*) est régulier.

Plus généralement, en tout point régulier où $z_+ \in T_+$, $z_- \in T_-$ sont dans $S = S_{u_*} \cap -S_{u_*}$, on a $z_+ = z_-$ et leur valeur commune z que nous appellerons naturellement dérivée en λ de la solution $u(\lambda)$ vérifie l'équation :

$$(V.1) \quad \begin{cases} a(Z, w) = \lambda_* (F'(u_*) Z | w) + (F(u_*) | w) \\ \forall w \in S ; Z \in S = Su_* \cap -Su_* \end{cases}$$

Remarquons que si $h \in Ku_*$, $a(u_*, h) \geq \lambda_* (F(u_*) | h)$ car $h = \frac{w-u_*}{\varepsilon}$ avec $w \in K$, vu que u_* est solution de (I.1). Cette inégalité se conserve à la limite pour $h \in \bar{Ku}_*$. Donc si $h \in \bar{Ku}_* \cap -\bar{Ku}_*$ on a $a(u_*, h) = \lambda_* (F(u_*) | h)$ i.e $h \in \{u_* - \lambda_* G F(u_*)\}^\perp$, donc

$S = Su_* \cap -Su_* = \bar{Ku}_* \cap -\bar{Ku}_* = \{h \in H^1_0(\Omega) / h = 0 \text{ quasi-partout sur } \{u_* = \psi\}\}$, u_* et ψ étant choisis quasi-continus.

On peut alors interpréter la forme faible (V.1) :

Soit $\Omega_* = \Omega \setminus \{u_* = \psi\}$ où l'ensemble de coïncidence est défini à un ensemble de capacité nulle près.

En prenant $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_*) \subset S$ dans (V.1) on voit que toute solution Z de (V.1) vérifie :

$$(V.2) \quad \Delta Z = \lambda_* F'(u_*) Z + F(u_*)$$

au sens des distributions sur Ω_* , $Z = 0$ sur $\partial\Omega$ et vu que $Z = 0$ q.p sur $\{u_* = \psi\}$ on aura $Z = 0$ sur $\partial\Omega$ si la frontière de $\{u_* = \psi\}$ est assez régulière (*). Autrement dit, la dérivée est solution du problème de Dirichlet linéarisé de (I.2) selon λ dans le complémentaire de l'ensemble de coïncidence.

Remarque 1 : Comme pour les équations, on démontre que la branche maximale de l'I.V. (I-1) est continue à droite, ce qui donne, en tout point régulier de la branche, l'existence d'une direction conique à droite.

Remarque 2 : Le cas simple à traiter pour l'existence de branches est celui où Su_* est un espace vectoriel (cf. deuxième partie). Dans ce cas, $Su_* = Su_* \cap -Su_* = S = \{w \in H^1_0(\Omega) / w = 0 \text{ q.p sur } \{u_* = \psi\}\}$. Mais ceci n'est pas toujours réalisé, cf. par exemple les points de transition. Concernant l'explicitation de Su_* , on a toutefois le résultat intéressant suivant :

(*) Cf. [24], [27].

Proposition V.1 : Si $\psi \in H^2(\Omega)$ et si $-A\psi + \lambda_* F(\psi) > 0$ pp
(ou < 0 p.p) alors $Su_* = \{w \in H^1_0(\Omega) / w \leq 0 \text{ q.p sur } E ; w = 0 \text{ p.p sur } E\}$
où $E = \{u_* = \psi\}$.

Preuve : si $w \in \bar{K}u_* = \{w \in H^1_0(\Omega) / w \leq 0 \text{ q.p sur } E\}$ on va montrer que
 $w \in \{u_* - \lambda_* G F(u_*)\}^\perp \Leftrightarrow w = 0 \text{ p.p sur } E$.

Si $w \in \{u_* - \lambda_* G F(u_*)\}^\perp$, $a(u_*, w) = \lambda_*(F(u_*) | w)$

Puisque u_* a la régularité $H^2(\Omega)$ les a_{ij} , Ω étant réguliers, on peut appliquer la formule de Green :

$$\int_{\Omega} Au_* w \, dx = \lambda_* \int_{\Omega} F(u_*) w \, dx$$

$$\int_E Au_* w + \int_{\Omega \setminus E} Au_* w = \lambda_* \int_E F(u_*) w + \lambda_* \int_{\Omega \setminus E} F(u_*) w$$

On sait ([62]) que $-Au_* + \lambda_* F(u_*)$ est une mesure ≥ 0 à support dans E fermé mais ici, point essentiel, c'est même une fonction de $L^2(\Omega)$, donc

$\int_{\Omega \setminus E} (-Au_* w + \lambda F(u_*) w) \, dx = 0$ (ceci est faux en général pour une mesure, à cause du bord) D'où finalement :

$$w \in \{u_* - \lambda_* G F(u_*)\}^\perp \Leftrightarrow \int_E [-Au_* + \lambda_* F(u_*)] w \, dx = 0 \quad (V.4)$$

Mais sur $E = \{u_* = \psi\}$ on a $u_* = \psi$ p.p évidemment mais aussi, puisque $u_* \in H^2(\Omega)$, $Au_* = A\psi$ p.p ([29]) et (V.4) s'écrit :

$\int_E [-A\psi + \lambda_* F(\psi)] w \, dx = 0$. Comme $-A\psi + \lambda F(\psi) > 0$ p.p et que $w \leq 0$ p.p sur E cette intégrale est nulle si et seulement si $w = 0$ p.p sur E .

□

- ANNEXE -

CALCUL DES DIRECTIONS CONIQUES

DANS DEUX EXEMPLES DE PROBLEMES D'OBSTACLE

I. PROBLEME AVEC DE LA REGULARITE

Dans Ω boule unité de \mathbb{R}^n , on cherche les solutions à symétrie radiale de :

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda \geq 0 \\ u \leq a \\ (a-u)(\Delta u + \lambda) = 0 \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \iff (2) \quad \begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r} u' + \lambda = 0 & r > \rho \\ u(\rho) = 0 & u(\rho) = a \\ u(1) = 0 & 0 \leq \rho < 1 \end{cases}$$

On a existence et unicité de la solution et $\lambda \rightarrow u(\lambda, \cdot)$ est croissante.

On va déterminer $\frac{du}{d\lambda} +$ au point de transition équation-inéquation, puis ailleurs en fonction de n (pour illustrer l'aspect "capacité" mis en évidence avant) directement, mais aussi par l'intermédiaire des cônes Su_* .

I.1. Solutions explicites et dérivées en λ

$$\boxed{n=1} \quad (1/2 \text{ solution}) \quad \begin{cases} \lambda \leq 2a : u(\lambda, x) = \frac{\lambda}{2} (1-x^2) & 0 \leq x \leq 1 \\ \lambda > 2a : u(\lambda, x) = \begin{cases} a & 0 \leq x \leq \rho \\ \frac{\lambda}{2} (1-x^2) + \lambda\rho(|x|-1) & \rho \leq x \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

avec $(\rho-1)^2 = \frac{2a}{\lambda}$

D'où l'on déduit que ($\lambda = 2a$ est le point de transition) :

$$\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^+ = \begin{cases} \lambda < 2a : \frac{1}{2} (1-x^2) & 0 \leq x \leq 1 \\ \lambda = 2a : \frac{1}{2} (1-x^2) + \frac{1}{2} (|x|-1) & 0 \leq x \leq 1 \\ \lambda > 2a : \begin{cases} \frac{1}{2} (1-x^2) + \left(\frac{1+\rho}{2}\right) (|x|-1) & \rho \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

(il faut faire un passage à la limite sur $\frac{u(\lambda+\delta\lambda) - u(\lambda)}{\delta\lambda}$ dans $H^1_0(\Omega)$ pour trouver ce résultat, mais c'est aussi la dérivée formelle des expressions ci-dessus, ce qui peut se justifier par le théorème de Lebesgue).

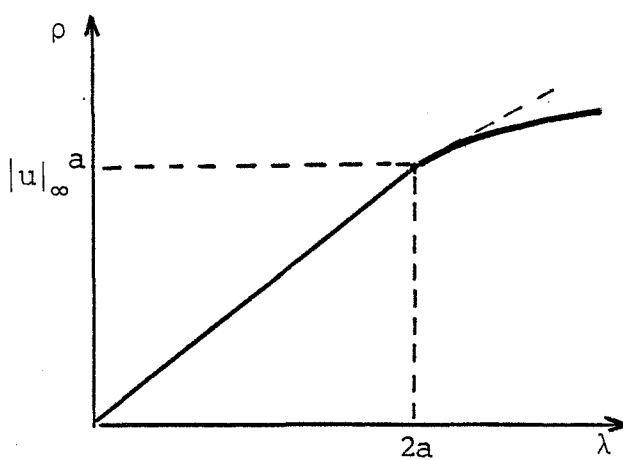
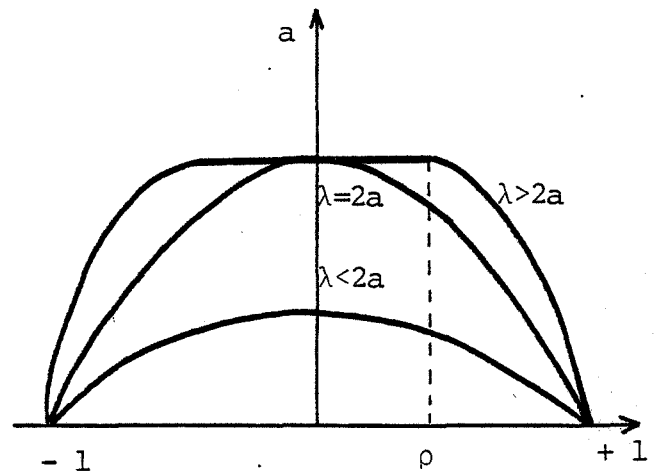
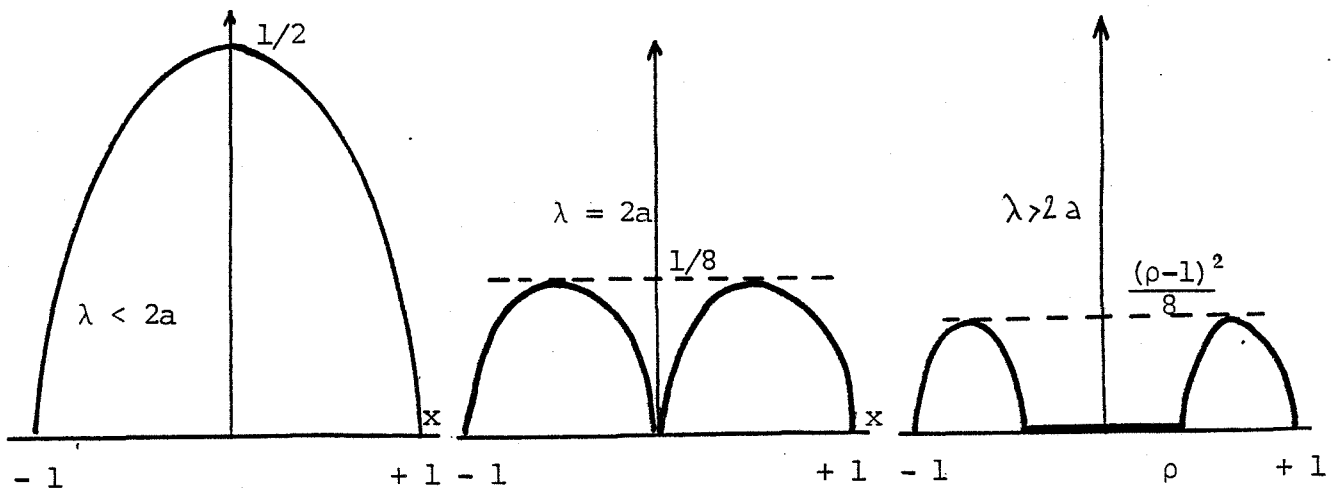


Diagramme $\lambda \rightarrow u(\lambda)$



Profils des solutions $u(\lambda, x)$



Profils des solutions dérivées en $\lambda: \left(\frac{du}{d\lambda}\right)^+$

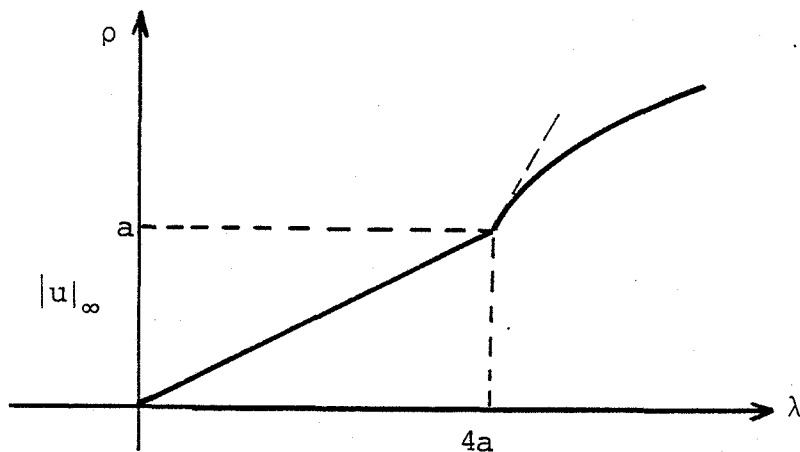
Dans tous les cas, on voit que $\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^+$ est la solution du problème linéarisé selon λ : $\Delta w + 1 = 0$ posé avec conditions de Dirichlet, dans le complémentaire de l'ensemble de coïncidence défini au sens des capacités (en particulier pour $\lambda = 2a, \{u_* = \psi\} = \{0\}$ au sens des capacités pour $n = 1$).

$n = 2$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda \leq 4a & u(\lambda, x) = \frac{\lambda}{4} (1 - x^2) \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \lambda > 4a & u(\lambda, x) = \begin{cases} a & \text{pour } 0 \leq x \leq \rho \\ a - \frac{\lambda}{2} \frac{x^2 \rho^2}{2} + \frac{\lambda \rho^2}{2} \operatorname{Log} \frac{x}{\rho} & \text{pour } \rho \leq x \leq 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\text{avec } 4a = \lambda (1 - \rho^2 + 2\rho^2 \operatorname{Log} \rho)$$

$$\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^+ = \left\{ \begin{array}{ll} \lambda < 4a : & \frac{1}{4} (1 - x^2) \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \lambda = 4a : & \frac{1}{4} (1 - x^2) \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \lambda > 4a & \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ pour } 0 \leq x \leq \rho \\ -\frac{1}{2} \frac{x^2 - \rho^2}{2} + \frac{\rho^2}{2} \operatorname{Log} \frac{x}{\rho} + \lambda \rho \rho' \operatorname{Log} \frac{x}{\rho} \\ (\text{avec } \rho \rho' \operatorname{Log} \rho = -\frac{a}{\lambda^2}) \\ = \frac{1}{4} (1 - x^2) + \frac{\rho^2}{2} \operatorname{Log} x + \lambda \rho \rho' \operatorname{Log} x \end{array} \right. \end{array} \right.$$



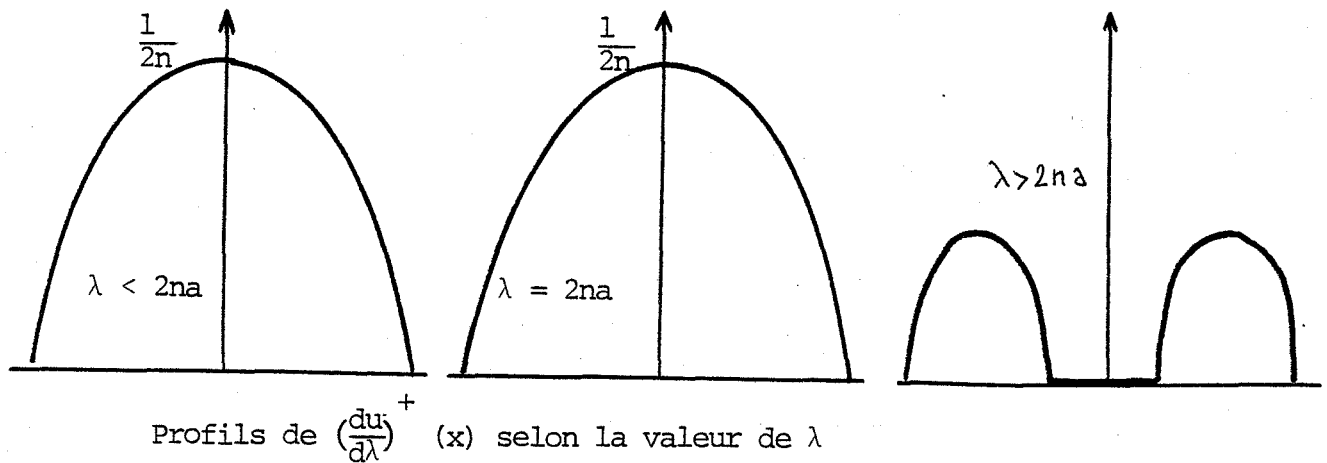
Les conclusions sont les mêmes que pour $n = 1$, $(\frac{du}{d\lambda})^+$ est solution du problème de Dirichlet linéarisé sur le complémentaire de l'ensemble de coïncidence. Pour $\lambda = 4a$, $\{u_* = \psi\} = \emptyset$ au sens des capacités pour $n = 2$, donc, contrairement au cas $n = 1$, on résout encore le linéarisé dans Ω tout entier.

$$n > 3$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda < 2na & u(\lambda, x) = \frac{\lambda}{2n} (1 - x^2) \\ \lambda > 2na & u(\lambda, x) = \begin{cases} a & \text{pour } 0 \leq x \leq \rho \\ a - \frac{\lambda}{n} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^n x^{2-n}}{2-n} + \frac{\rho^2}{2-n} \right] & \rho \leq x \leq 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

avec $a = \frac{\lambda}{n} \left[\frac{1}{2} - \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^n}{2-n} + \frac{\rho^2}{2-n} \right]$

$$\left(\frac{du}{d\lambda} \right)^+ = \left\{ \begin{array}{ll} \lambda < 2na : \frac{1}{2n} (1 - x^2) & 0 \leq x \leq 1 \\ \lambda = 2na : \frac{1}{2n} (1 - x^2) & 0 \leq x \leq 1 \\ \lambda > 2na : \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \rho \\ -\frac{1}{n} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^n x^{2-n}}{2-n} + \frac{\rho^2}{2-n} \right] \\ + \frac{a}{\lambda} \frac{-\rho - \rho^{n-1} x^{2-n} \frac{n}{2-n} + \frac{2\rho}{2-n}}{-\rho - \rho^{n-1} \frac{n}{2-n} + \frac{2\rho}{2-n}} & \rho \leq x \leq 1 \end{cases} \end{array} \right.$$



Conclusion : dans ce cas régulier, la détermination de $(\frac{du}{d\lambda})^+$ consiste à résoudre l'équation linéarisée dans le complémentaire de l'ensemble de coïncidence défini au sens des capacités, avec conditions de Dirichlet au bord.

I.2. Calcul conique pour déterminer $(\frac{du}{d\lambda})^+$

$n = 1$ Pour $\lambda < 2a$, $Su = H_0^1(\Omega)$ et on cherche w solution de :

$$\int_{\Omega} w'(x) v'(x) dx \geq \int_{\Omega} v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1$$

i.e $w'' + 1 = 0, w \in H_0^1 \Rightarrow w(x) = \frac{1}{2} (1 - x^2) = (\frac{du}{d\lambda})^+(x)$

Pour $\lambda = 2a$ $Su = \{w \in H_0^1 / w(0) \leq 0\} \cap \{w \in H_0^1 /$

$\int_{\Omega} u' w' = \lambda \int_{\Omega} w = \{w \in H_0^1 / w(0) \leq 0\}$ en prenant les représentants continus. $(\frac{du}{d\lambda})^+$ est l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} w' (v' - w') dx \geq \int_{\Omega} (v - w) dx \\ \forall v \in H_0^1, v(0) \leq 0 \\ w(0) \leq 0 \end{cases}$$

qui n'est autre que la solution de $w'' + 1 = 0$ $w'(0) = w(1) = 0$ c'est à dire Dirichlet - linéarisé. On retrouve la dérivée calculée antérieurement.

Pour $\lambda > 2a$: $Su = \{w \in H_0^1 / w \leq 0 \text{ sur } [-\rho, \rho]\} \cap T$
(w est continue)

$$T = \{w / \int_{-1}^1 u' w' = \lambda \int_{-1}^1 w\}$$

$$\int_{-1}^1 u' w' = \int_{-1}^{-\rho} u' w' + \int_{\rho}^1 u' w' = \int_{(-\rho, \rho)^c} -u'' w = \int_{-1}^1 \lambda.w$$

donc $T = \{w \in H_0^1 / \lambda \int_{-\rho}^{\rho} w = 0\}$

et $S_u = \{ w / w \leq 0 \text{ sur } (-\rho, \rho) \text{ et } \int_{-\rho}^{\rho} w = 0 \} = \{ w / w \equiv 0 \text{ sur } [-\rho, \rho] \}$
ici S_u est un s.e.v, et on cherche w solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^1 w' (v' - w') = \int_{-1}^1 v - w \\ \forall v \in S_u \\ w \in S_u \end{array} \right. \quad \text{ce qui donne la solution du problème de Dirichlet linéarisé } w'' + 1 = 0 \text{ dans } [-\rho, \rho]^C.$$

n peut aussi vérifier, grâce à l'unicité dans ces I.V que les solutions $\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^+$ calculés explicitement au § I.1 marchent !

$n \geq 2$

$\lambda \leq 2na$: $\{u = \psi\} = \emptyset$ au sens des capacités (on a un point dedans au pire) et comme l'équation est vérifiée jusqu'au point de transition inclus, $S_u = H_0^1$ et $\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^+$ est la solution du linéarisé ordinaire dans Ω .

$\lambda > 2na$: en tant que fonctions de r seulement, les représentants quasi-continus sont les fonctions continues (sinon, si $\tilde{g}(r)$ est discontinue, la fonction correspondante g de n variables est discontinue sur une hypersphère de \mathbb{R}^n qui est de capacité > 0 et \tilde{g} ne serait pas quasi-continue !). La régularité H^2 permet, d'après le résultat général, de dire que $S_u = \{w \in H_0^1(\Omega) / \tilde{w} \equiv 0 \text{ sur } [0, \rho]\}$ et $\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^+$ s'obtient encore par Dirichlet linéarisé dans $[0, \rho]^C$.

Conclusion dans ce cas régulier

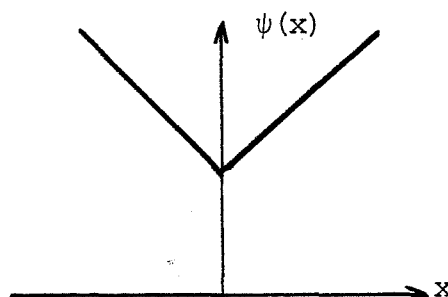
① en dehors du point de transition, $S_u = \{w \in H_0^1 / w = 0 \text{ sur } \{u = \psi\}\}$ est un s.e.v et le calcul de $\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^+$ se fait par une équation qui est en fait Dirichlet linéarisé dans $\Omega \setminus \{u = \psi\}$

② au point de transition, $S_u = \{w \in H_0^1 / w \leq 0 \text{ q.p sur } \{u = \psi\}\}$ est un cône, mais l'inéquation conifiée donnant $\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^+$ a pour seule solution une fonction nulle sur $\{u = \psi\}$, on peut donc aussi chercher $\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^+$ en résolvant l'équation associée à $S = \{w \in H_0^1 / w = 0 \text{ q.p sur } \{u = \psi\}\}$ c'est à dire encore Dirichlet linéarisé dans $\Omega \setminus \{u = \psi\}$.

II. CAS D'UNE SOLUTION NON REGULIERE

On se place en dimension 1, $\Omega =] - 1, 1[$ et on cherche la solution de :

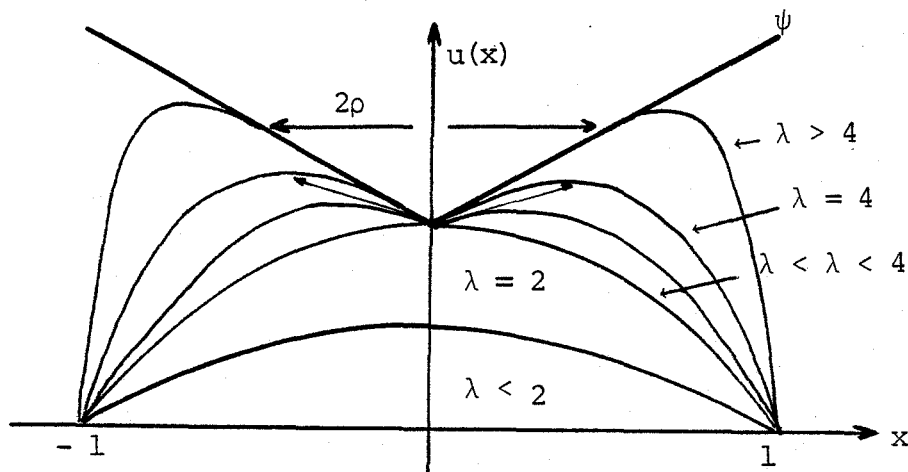
$$\begin{cases} u'' + \lambda \geq 0 \\ u \leq \psi \quad \text{avec } \psi(x) = 1 + |x| \\ (\psi - u)(u'' + \lambda) = 0 \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$



On a $(\Delta\psi)^- = (-\psi'')^- = 2\delta \notin L^p(\Omega)$, on n'aura pas *a priori* la régularité C^1 sur l'ensemble Ω tout entier (irrégularité sur l'ensemble de contact ou sa frontière).

II.1. Solutions explicites et dérivées en λ

$$u(x) = \begin{cases} \lambda \leq 2 : & \frac{\lambda}{2} (1 - x^2) \quad \text{solution régulière, pas de contact} \\ \lambda = 2 : & \frac{\lambda}{2} (1 - x^2) : \text{solution régulière, contact en 0 seulement} \\ 2 < \lambda < 4 : & -\frac{\lambda}{2} x^2 + \left(\frac{\lambda}{2} - 1\right) |x| + 1 \quad \text{solution non } C^1 \text{ en 0, contact en 0 seulement} \\ \lambda = 4 : & -\frac{\lambda}{2} x^2 + \left(\frac{\lambda}{2} - 1\right) |x| + 1 \quad \text{solution non } C^1 \text{ en 0 contact en 0 seulement, la solution "colle" à } \psi \text{ en 0} \\ \lambda > 4 : & \begin{cases} 1 + |x| & \text{si } |x| \leq \rho \\ -\frac{\lambda}{2} x^2 + (1 + \lambda - 2\sqrt{\lambda}) |x| - 1 - \frac{\lambda}{2} + 2\sqrt{\lambda}, & \rho \leq |x| \leq 1 \end{cases} \\ & \text{avec } \rho = 1 - \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \\ & \text{contact sur } [-\rho, \rho] \text{ solution } C^1 \text{ partout (y compris en } \pm \rho) \text{ sauf en 0.} \end{cases}$$



Profils des solutions

Calcul explicite des dérivées coniques $\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^+$ (dans $H^1_0(\Omega)$)

On note que le point de transition au sens des capacités est $\lambda = 2$ et non pas $\lambda = 4$.

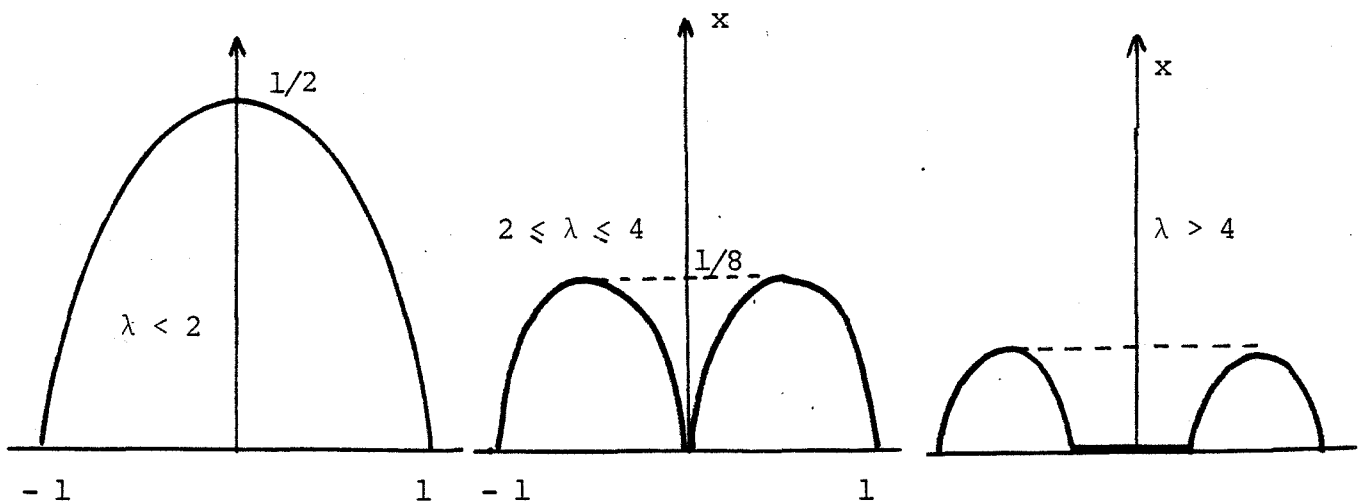
$$\underline{\lambda < 2} : \left(\frac{du}{d\lambda}\right)^+ = \frac{1}{2} (1 - x^2)$$

$$\underline{\lambda = 2} : \left(\frac{du}{d\lambda}\right)^+ = \frac{1}{2} [|x| - x^2]$$

$$\underline{2 < \lambda < 4} : \left(\frac{du}{d\lambda}\right)^+ = \frac{1}{2} [|x| - x^2]$$

$$\underline{\lambda = 4} : \left(\frac{du}{d\lambda}\right)^+ = \frac{1}{2} [|x| - x^2]$$

$$\underline{\lambda > 4} : \left(\frac{du}{d\lambda}\right)^+ = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq |x| \leq \rho \\ -\frac{x^2}{2} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) |x| - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & \text{si } |x| > \rho \end{cases}$$



Profils des dérivées coniques

Dans tous les cas $\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^+$ est la solution de l'équation linéarisée dans le complémentaire de l'ensemble de coïncidence avec conditions de Dirichlet au bord.

Remarque : en dimension $n \geq 2$, on passe, en $\lambda_c = 2$ (point de transition) d'un contact ponctuel ($u = 1 - \frac{\lambda r^2}{2n}, \lambda = 2n$) à un contact de mesure > 0 directement, sans qu'il y ait une zone $\lambda \in [\lambda_c^1, \lambda_c^2]$ à contact ponctuel (et $\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^+ = \frac{1}{2n} (1 - x^2)$ en λ_c).

II.2. Calcul conique pour déterminer $\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^+$

$\lambda < 2$: $\{u = \psi\} = \emptyset$, $\{u - \lambda G(1)\}^\perp = H_0^1$: $Su = H_0^1(\Omega)$ et $\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^+$ est la solution de l'équation linéarisée ordinaire $\frac{1}{2}(1 - x^2)$

$\lambda = 2$: $\{u = \psi\} = \{0\}$ au sens des capacités, $\{u - \lambda G(1)\}^\perp = H_0^1(\Omega)$ et $Su = \{w \in H_0^1 / w(0) \leq 0\}$

La solution de l'inéquation conifiée donnant $\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^+ = w$ vérifie :

$$\int w'(v' - w') \geq \int v - w \quad \forall v \in Su ; w \in Su ; \text{ elle est unique}$$

$$\text{et c'est } w(x) = \frac{|x|}{2} - \frac{x^2}{2} : \text{ en effet } \int w'(v' - w') - \int v - w \\ = [w'(0_-) - w'(0_+)] [v(0) - w(0)] = -v(0) \geq 0 \quad \forall v \in Su$$

On voit que c'est la solution de l'équation linéarisée dans $\Omega \setminus \{0\}$ ($w \in Su$ i.e. $w(0) \leq 0$ mais en fait la solution vérifie $w(0) = 0$).

$2 < \lambda \leq 4$: $\{u = \psi\} = \{0\}$ mais l'équation n'est plus vérifiée :

$$T = \{u - \lambda G(1)\}^\perp \neq H_0^1(\Omega). \text{ Déterminons } T : w \in T \iff \int_{-1}^1 u'(x) w'(x) = \lambda \int_{-1}^1 w(x) dx \\ \int_{-1}^1 u'(x) w'(x) = \int_{-1}^0 (-\lambda x + \frac{\lambda}{2} - 1) w'(x) + \int_0^1 (-\lambda x - \frac{\lambda}{2} + 1) w'(x) dx \\ = (2\lambda - 1) w(0) + \lambda \int_{-1}^1 w(x) dx \text{ et comme } \lambda > 2 \text{ on a } w \in T \iff w(0) = 0$$

$$Su = \{w \in H_0^1 / w(0) = 0\}$$

Le calcul de $\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^+$ consiste à résoudre l'équation linéarisée dans $(-1, 1) \setminus \{0\}$, et on trouve $w = \frac{1}{2} [|x| - x^2]$.

$$\underline{\lambda > 4} : \{u = \psi\} = [-\rho, \rho] \quad w \in T = \{u - \lambda G(1)\}^\perp \iff$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 u' w' &= \lambda \int w = \int_{-1}^{-\rho} + \int_{-\rho}^0 + \int_0^{\rho} + \int_{\rho}^1 u' w' \\ \int_{-1}^1 u' w' &= \int_{-1}^{-\rho} (-\lambda x - 1 - \lambda + 2\sqrt{\lambda}) w' - \int_{-\rho}^0 w' + \int_0^{\rho} w' + \int_{\rho}^1 (-\lambda x + 1 + \lambda - 2\sqrt{\lambda}) w' \\ &= \lambda \int_{[-\rho, \rho]^c} w \, dx + w(\rho) + w(-\rho) - 2w(0) + (\lambda\rho - 1 - \lambda + 2\sqrt{\lambda})w(-\rho) - \\ &\quad - (-\lambda\rho + 1 + \lambda - 2\sqrt{\lambda})w(\rho) \\ &= \lambda \int_{[-\rho, \rho]^c} w \, dx + w(\rho) + w(-\rho) - 2w(0) - w(-\rho) - w(\rho) \\ &= \lambda \int_{[-\rho, \rho]^c} w \, dx - 2w(0). \text{ Donc } T = \{w \in H^1_0 / \int_{-\rho}^{\rho} w \, dx = -2w(0)\} \end{aligned}$$

Si w continue est ≤ 0 sur $(-\rho, \rho)$ cette relation implique $w = 0$ sur $[-\rho, \rho]$ donc pour les représentants continus $Su = \{w \in H^1_0 / w \equiv 0 \text{ sur } [-\rho, \rho]\}$ et la recherche des directions coniques consiste encore à résoudre Dirichlet linéarisé sur $(-1, 1) \setminus [-\rho, \rho]$.

Conclusion : dans ce cas irrégulier Su est H^1_0 , un s.e.v ou un cône. Dans tous les cas, la solution de l'I.V conifiée peut en fait se trouver en résolvant le problème de Dirichlet linéarisé dans le complémentaire de l'ensemble de coïncidence.

ETUDE LOCALE DES BRANCHES DE SOLUTIONS

DANS UN PROBLEME D'OBSTACLE

DEUXIEME PARTIE

DEVELOPPEMENTS LOCAUX , POINTS DE RETOURNEMENT

(AVEC F. ISSARD - ROCH)

Résumé : On poursuit l'étude, amorcée dans la première partie, pour une inéquation variationnelle (I.V.) associée à un problème d'obstacle, en donnant des résultats concernant le comportement local des branches de solutions. Dans la première partie ont été introduites les notions de point singulier ou régulier, de directions coniques en un point régulier, et l'interprétation géométrique de ces concepts avait été donnée. Ces définitions étendent à certaines I.V. les notions utilisées pour l'étude locale de branches de solutions dans des problèmes de valeurs propres non linéaires associés à une équation elliptique.

On montre ici que ces notions permettent d'amorcer l'étude locale des branches dans les I.V. Les résultats essentiels obtenus pour le moment sont les suivants :

Sous une hypothèse assurant en particulier qu'on est en un point régulier, on démontre l'existence d'un développement local autour de ce point, le terme d'ordre un étant la direction conique, le terme complémentaire d'ordre supérieur étant une multi-application. En pratique, on a affaire essentiellement

à deux types de points réguliers : les points de transition , pour lesquels on précise, sous l'hypothèse de départ, les développements à droite et à gauche, et les points situés "après" la transition pour lesquels cette hypothèse peut être relaxée : on obtient alors un développement local en tout point régulier. Dans ce deuxième cas, on sait aussi trouver un développement autour d'un point singulier, sous des hypothèses et avec des résultats qui sont à rapprocher de [37] .

I. HYPOTHESES ET NOTATIONS

I.1. Données du problème

On considère la forme bilinéaire, continue, coercive, symétrique (pour simplifier) suivante sur $H_0^1(\Omega)$:

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) dx$$

les a_{ij} étant des coefficients réguliers sur $\bar{\Omega}$, Ω ouvert borné régulier de \mathbb{R}^n .

On appelle A l'opérateur du second ordre sous forme divergentielle associé à a :

$$A u = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$$

Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction telle que $t \rightarrow f(x,t)$ soit croissante, deux fois dérivable, $f(x,0) \not\equiv 0$, les fonctions f, f_t, f_{tt} étant de Carathéodory sur $\Omega \times \mathbb{R}$, et bornées sur les bornés de $\Omega \times \mathbb{R}$. On notera F, F' les opérateurs de Nemytskiï associés à f, f_t, \dots

On désigne par ψ (l'obstacle) une fonction positive sur Ω , $\psi \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, supposée quasi-continue (quitte à la modifier sur un ensemble de a -capacité nulle, cf. [66]) et on pose $K = \{ v \in H_0^1(\Omega) / v \leq \psi \text{ pp} \} = \{ v \in H_0^1(\Omega) / v \leq \psi \text{ q.p.} \}$. On notera de la même façon les éléments de $H^1(\Omega)$ et leurs - uniques - représentants quasi-continus.

I.2. Le problème

Avec ces notations, on définit le problème de valeurs propres non linéaires suivant, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$:

$$(I.1) \begin{cases} a(u, v-u) \geq \lambda (F(u), v-u) \\ \forall v \in K ; u \in K \end{cases}$$

où $(.,.)$ désigne le produit scalaire usuel sur $L^2(\Omega)$. Les normes $L^p(\Omega)$ seront notées $|\cdot|_p$ et la norme usuelle sur $H^1_0(\Omega)$: $((.,.) + (\nabla., \nabla.))^{1/2}$ sera notée $||\cdot||$.

On note P_K le a -projecteur sur le convexe fermé $K \subset H^1_0(\Omega)$, i.e $\forall x \in H^1_0(\Omega)$, $P_K(x)$ est caractérisé par :

$$a(x - P_K(x), y - P_K(x)) \leq 0 \quad \forall y \in K ; P_K(x) \in K$$

Si G désigne l'opérateur de Green de $L^2(\Omega)$ dans $H^1_0(\Omega)$ associé à A avec conditions de Dirichlet, l'I.V (I.1) admet la formulation équivalente

$$(I.1') \quad u = P_K [\lambda G F(u)]$$

Rappelons que, toutes les données étant régulières, G est compact de $L^2(\Omega)$ dans $H^1_0(\Omega)$.

Etant donné que les solutions u de (I.1) sont positives et majorées par ψ , on a modifié au besoin f convenablement pour $t \notin [0, |\psi|_\infty]$ pour que F soit continue de $L^2(\Omega)$ dans $L^p(\Omega) \quad \forall p \geq 2$, de sorte que (I.1') a toujours un sens.

I.3. "Linéarisation" conique

Si $u \in K$, $C(K, u) = \bigcup_{\mu \geq 0} \mu \{K - u\}$ est le cône des déplacements admissibles dans K à partir de u . Comme dans [66], on pose :

$\{u = \psi\} = \{x \in \Omega / u(x) = \psi(x) \text{ q.p.}\}$, qui est défini à un ensemble de capacité nulle près et on a ([66]) :

$$\overline{C(K, u)} = \{v \in H^1_0(\Omega) / v \leq 0 \text{ q.p sur } \{u = \psi\}\}$$

Si (λ^*, u^*) est une solution de (I.1), on note $\{u^* - \lambda^* G F(u^*)\}^\perp$ le a -orthogonal de $u^* - \lambda^* G F(u^*)$ c'est à dire l'ensemble $\{v \in H^1_0(\Omega) / a(u^*, v) = \lambda^* (F(u^*), v)\}$ et on pose

$$S_{u^*} = \overline{C(K, u^*)} \cap \{u^* - \lambda^* G F(u^*)\}^\perp$$

Les notions suivantes ont été introduites dans la première partie :
Soit (λ^*, u^*) une solution de (I.1). L'I.V. suivante :

$$(I.2) \quad \begin{cases} a(w, h-w) \geq \lambda^* (F'(u^*) w, h-w) \\ \forall h \in S_{u^*}; w \in S_{u^*} \end{cases}$$

s'appelle conifiée (homogène) de (I.1) en (λ^*, u^*) selon u . Si (I.2) n'admet que la solution $w = 0$, on dit que (λ^*, u^*) est régulier, sinon on dit que (λ^*, u^*) est singulier.

On notera que (I.2.) admet la formulation équivalente

$$(I.2') \quad w = P_{S_{u^*}} [\lambda^* G F'(u^*) w] = T(w)$$

où $P_{S_{u^*}}$ est le a - projecteur sur le cône convexe fermé S_{u^*} . T est une application positivement homogène qui n'est linéaire que si S_{u^*} est un espace vectoriel.

On définit ensuite les directions coniques à droite (resp. à gauche) en une solution (λ^*, u^*) de (I.1) comme les solutions Z_+ (resp Z_-) de l'I.V. conifiée (non homogène) :

$$(I.3)_+ \quad \begin{cases} a(Z_+, h - Z_+) \geq \lambda^* (F'(u^*) Z_+, h - Z_+) + (F(u^*), h - Z_+) \\ \forall h \in S_{u^*}; Z_+ \in S_{u^*} \end{cases}$$

(resp. $(I.3)_-$: même inéquation pour Z_- , mais avec $h, Z_- \in -S_{u^*}$)
ou, de façon équivalente, comme les solutions de

$$(I.3')_+ \quad Z_+ = P_{S_{u^*}} [\lambda^* G F'(u^*) Z_+ + G F(u^*)]$$

$$(resp. (I.3')_- \dots P_{-S_{u^*}} \dots)$$

I.4. Rappels concernant la dérivation conique

Dans la suite nous utiliserons intensivement la notion de dérivation conique des projecteurs ([49] [66]) .

Rappelons que, avec des convexes du type $K = \{v \in H_O^1(\Omega) / v \leq \psi \text{ q.p.}, \psi \text{ q.c.}\}$ on peut écrire la formule suivante, avec $v \in H_O^1(\Omega)$, $w \in H_O^1(\Omega)$, $t \geq 0$, $y = P_K(v)$ et $S^Y = \overline{C(K, Y)} \cap \{v - y\}^\perp$ ([66]) :

$$P_K(v+tw) = P_K(v) + t P_{S^Y}(w) + o(t, w)$$

avec $\lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{o(t, w)}{t} = 0$ uniformément par rapport à w appartenant à un compact de $H_O^1(\Omega)$.

Soit (λ, u) une solution de (I.1). On suppose que $n \leq 4$ ce qui implique que $H_O^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$. La formule ci-dessous pour $t > 0$ a alors un sens, car $h \in H_O^1(\Omega)$ vérifie $h^2 \in L^2(\Omega)$:

$$P_K[\lambda G F(u + t h)] = P_K[\lambda G F(u) + \lambda t G F'(u)h + \frac{\lambda t^2}{2} G F''(\xi) h^2]$$

On applique la formule de dérivation conique avec

$$v = \lambda G F(u), y = P_K(v) = u, w = \lambda G F'(u)h + \frac{\lambda t}{2} G F''(\xi) h^2;$$

$$P_K[\lambda G F(u + t h)] = P_K[\lambda G F(u)] + t P_{S_u}[\lambda G F'(u)h + \frac{\lambda t}{2} G F''(\xi) h^2]$$

+ $t \varepsilon_1(t, h)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0_+} \varepsilon_1(t, h) = 0$ uniformément lorsque h est dans un borné de $H_O^1(\Omega)$ (car $\lambda G F'(u)h + \frac{\lambda t}{2} G F''(\xi) h^2$ reste dans un compact de $H_O^1(\Omega)$).

Puisque tout projecteur est une application lipschitzienne on a :

$$P_{S_u}[\lambda G F'(u)h + \frac{\lambda t}{2} G F''(\xi) h^2] = P_{S_u}[\lambda G F'(u)h] + \varepsilon_2(t, h)$$

avec $\lim_{t \rightarrow 0_+} \varepsilon_2(t, h) = 0$ uniformément lorsque h reste dans un borné de $H_O^1(\Omega)$ (car h^2 reste borné dans $L^2(\Omega)$).

En résumé, on a la formule suivante, lorsque (λ, u) est une solution de (I.1), $h \in H_O^1(\Omega)$, $t \geq 0$:

$$(I.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_K [\lambda GF(u+th)] = P_K [\lambda GF(u)] + t P_{S_u} [\lambda GF'(u)h] + t \varepsilon(t,h) \\ \lim_{t \rightarrow 0_+} \varepsilon(t,h) = 0 \text{ uniformément lorsque } h \text{ reste borné dans } H^1_0(\Omega) \end{array} \right.$$

Sous les mêmes hypothèses, on démontre aussi la formule :

$$(I.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_K [(\lambda+t)GF(u+th)] = P_K [\lambda GF(u)] + t P_{S_u} [\lambda GF'(u)h + GF(u)] + t\varepsilon(t,h) \\ \lim_{t \rightarrow 0_+} \varepsilon(t,h) = 0 \text{ uniformément lorsque } h \text{ reste borné dans } H^1_0(\Omega) \end{array} \right.$$

L'hypothèse $n \leq 4$ est nécessaire chaque fois que l'on utilise les formules (I.4) et (I.5), donc dans les Théorèmes II.1 et III.1 ci-après.

II. EXISTENCE LOCALE ET UNILATERALE, DANS LE CAS GENERAL, D'UN DEVELOPPEMENT AUTOUR DE CERTAINS POINTS REGULIERS

Soit (λ^*, u^*) une solution de (I.1).

II.1 Lemme d'inversion

Lemme II.1

Si $\inf \{a(w,w) - (\lambda^* F'(u^*)w,w)/w \in S_{u^*} - S_{u^*}, ||w|| = 1\} > 0$

Alors 1) $\forall k \in H^1_0(\Omega)$ l'application :

$w \longrightarrow w - P_{S_{u^*}} [\lambda^* GF'(u^*)w + k]$ est bijective de $H^1_0(\Omega)$
dans $H^1_0(\Omega)$ et
son inverse R_k est lipschitzienne de $H^1_0(\Omega)$ dans $H^1_0(\Omega)$
de rapport L indépendant de k

2) On obtient les mêmes résultats pour l'application

$w \longrightarrow w - P_{-S_{u^*}} [\lambda^* GF'(u^*)w + k].$

Corollaire II.1

Sous l'hypothèse du Lemme II.1, il existe une unique direction conique à droite (respectivement à gauche) en (λ^*, u^*) notée Z_+ (respectivement Z_-). On a $Z_+ \geq 0$ p.p. sur Ω , et en particulier $Z_+ = 0$ q.p. sur $\{u^* = \psi\}$.

Remarque II.1

Si $F'(u^*) > 0$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $\inf \{ a(w,w) - \lambda^* (F'(u^*) w, w) / w \in S_{u^*} - S_{u^*}, \|w\| = 1 \} > 0$
- (ii) $\inf \{ a(w,w) - \lambda^* (F'(u^*) w, w) / w \in S_{u^*} - S_{u^*}, |w|_2 = 1 \} > 0$
- (iii) $\lambda^* < \inf \{ \frac{a(w,w)}{(F'(u^*) w, w)} / w \in S_{u^*} - S_{u^*}, w \neq 0 \}$

et elles impliquent que (λ^*, u^*) est régulier (cf. première partie) .

Démonstration du Lemme II.1

On fait la preuve pour le 1) : soit $k \in H^1_0(\Omega)$ fixé, $g \in H^1_0(\Omega)$

a) considérons l'I.V. suivante

$$(II.1) \quad \begin{cases} a(v, h-v) - \lambda^* (F'(u^*) v, h-v) \geq \lambda^* (F'(u^*) g, h-v) + a(k, h-v) \\ \forall h \in S_{u^*} ; v \in S_{u^*}. \end{cases}$$

elle admet une unique solution v notée $T_k(g)$

en effet :

soit b la forme bilinéaire continue symétrique sur $H^1_0(\Omega)$:

$$b(v, w) = a(v, w) - \lambda^* (F'(u^*) v, w) \text{ et}$$

$$\text{et } J(v) = \frac{1}{2} b(v, v) - a(k, v) - \lambda^* (F'(u^*) g, v)$$

L'hypothèse implique : $\bullet \inf \{ b(v,v)/v \in S_{u^*}, ||v|| = 1 \} > 0$

d'où $\lim_{\substack{||v|| \rightarrow +\infty \\ v \in S_{u^*}}} J(v) = +\infty$

$$\bullet \forall (v,w) \in (S_{u^*})^2, b(v-w, v-w) > 0.$$

d'où $J: S_{u^*} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonctionnelle strictement convexe, s.c.i.

donc $\forall g \in H^1_0(\Omega)$, l'I.V. (II.1) admet une unique solution

$T_k(g)$ donnée par $J(T_k(g)) = \inf \{ J(v)/v \in S_{u^*} \}.$

b) Montrons que T_k est lipschitzienne de $H^1_0(\Omega)$ dans $H^1_0(\Omega)$.

soit $(g_1, g_2) \in [H^1_0(\Omega)]^2$

si $w_1 = T_k(g_1)$ on a (II.1) $\begin{cases} b(w_1, h-w_1) \geq a(k, h-w_1) + \lambda^* (F'(u^*)g_1, h-w_1) \\ \forall h \in S_{u^*} \end{cases}$

si $w_2 = T_k(g_2)$ on a (II.1) $\begin{cases} b(w_2, h-w_2) \geq a(k, h-w_2) + \lambda^* (F'(u^*)g_2, h-w_2) \\ \forall h \in S_{u^*} \end{cases}$

On prend $h = w_2$ dans la première inéquation, $h = w_1$ dans la deuxième et on fait la somme :

$$b(w_1 - w_2, w_1 - w_2) \leq \lambda^* (F'(u^*) (g_1 - g_2), w_1 - w_2).$$

Mais $w_1 - w_2 \in S_{u^*} - S_{u^*}$ donc d'après l'hypothèse, il existe $L_1 > 0$

tel que $\alpha ||w_1 - w_2||^2 \leq L_1 ||g_1 - g_2|| \cdot ||w_1 - w_2|| \Rightarrow$

$$||T_k(g_1) - T_k(g_2)|| \leq \frac{L_1}{\alpha} ||g_1 - g_2||$$

On remarque que $L_2 = \frac{L_1}{\alpha}$ ne dépend pas de k .

c) Conclusion

$$w - P_{S_{u^*}} [\lambda^* GF'(u^*)w + k] = g$$

$$\Leftrightarrow v = P_{S_{u^*}} [\lambda^* GF'(u^*) (v+g) + k] \text{ avec } v = w-g$$

$$\Leftrightarrow v \text{ est solution de (II.1) avec } v = w-g$$

or (II.1) admet une unique solution $T_k(g)$

donc $\exists ! w \in H^1_0(\Omega)$ tq $w - P_{S_{u^*}} [\lambda^* GF'(u^*)w+k] = g : w = T_k(g) + g$

$= R_k(g)$ et R_k est lipschitzienne selon g de rapport $L = L_2+1$ indépendant de k .

□

Remarque II.2

Si on suppose seulement $\inf \{a(w,w) - \lambda^* (F'(u^*)w,w) / w \in S_{u^*}, ||w|| = 1\} > 0$ J n'est plus une fonctionnelle convexe sur S_{u^*} mais on peut montrer au moyen d'une suite minimisante pour J , que $\forall g \in H^1_0(\Omega)$, (II.1) admet au moins une solution.

Démonstration du corollaire II.1

Appliquons le lemme II.1 avec $k = GF(u^*)$: il existe donc une unique direction conique à droite Z_+ (c'est à dire solution de $(I.3')_+$) et une unique direction conique à gauche Z_- (solution de $(I.3')_-$) ;

Z_+ étant dans S_{u^*} , on a $Z_+^+ \in S_{u^*} \cap -S_{u^*}$, où, si $Z \in H^1_0(\Omega)$, $Z^+ \in H^1_0(\Omega)$ désigne sa partie positive (cf. première partie). On prend $h = Z_+^+$ dans $(I.3)_+$

$$a(Z_+, Z_+^-) - \lambda^* (F'(u^*) Z_+, Z_+^-) \geq (F(u^*), Z_+^-) \geq 0$$

D'après l'hypothèse du lemme (II.1) on a, puisque $Z_+^- = Z_+^+ - Z_+ \in S_{u^*} - S_{u^*}$:

$$\alpha ||Z_+^-||^2 \leq a(Z_+^-, Z_+^-) - \lambda^* (F'(u^*) Z_+^-, Z_+^-) \leq 0 \Rightarrow Z_+^- = 0$$

donc $Z_+ \geq 0$ p.p. sur Ω .

□

Remarque II.3 : Sous l'hypothèse du lemme II.1, si de plus $(A\psi)^- \in L^p(\Omega)$ $p \geq 2$ et ∂E est régulière où $E = \{u^* = \psi\}$ ([24] [27]), on montre que $Z_- \geq Z_+$ p.p. sur Ω et en particulier $Z_- \geq 0$ p.p. sur Ω .

Preuve : On écrit les I.V. (I.3)₊ et (I.3)₋ sous la forme particulière :

$$a(Z_+, -h) - \lambda^*(F'(u^*) Z_+, -h) \geq (F(u^*), -h) ; \forall h \in -S_{u^*}$$

$$a(Z_-, h) - \lambda^*(F'(u^*) Z_-, h) \geq (F(u^*), h) ; \forall h \in -S_{u^*}$$

et on fait la somme :

$$a(Z_- - Z_+, h) - \lambda^*(F'(u^*) (Z_- - Z_+), h) \geq 0 \quad \forall h \in -S_{u^*}$$

La fonction $k = (Z_- - Z_+)^-$ est ≥ 0 sur Ω donc ≥ 0 q.p. sur E
donc $k \in -\overline{C(K, u^*)}$. D'autre part, $a(u^*, k) - \lambda^*(F'(u^*), k) =$

$$= \int_E (Au^* - \lambda^* F'(u^*)) k \, dx = 0 \quad ([62]) .$$

donc $k \in -S_{u^*}$ et on peut choisir $h = k$ dans l'inégalité précédente
ce qui donne :

$$a(k, k) - \lambda^*(F'(u^*) k, k) \leq 0 \Rightarrow k = 0 \text{ i.e. } Z_- \geq Z_+ \text{ p.p.}$$

□

Corollaire II.2 : Cas particulier du point de transition

Soit (λ^*, u^*) un point de transition équation - inéquation tel que
 $\inf \{a(w, w) - \lambda^*(F'(u^*)w, w) / w \in H_0^1(\Omega), ||w|| = 1\}$ soit > 0

Alors 1) il existe une unique direction conique à droite (resp. à gauche)
en (λ^*, u^*) notée Z_+ (resp Z_-)

2) Z_+ est positive p.p. sur Ω donc $Z_+ = 0$ q.p. sur $\{u^* = \psi\} = E$

3) $Z_- \geq Z_+$ p.p. sur Ω donc $Z_- \geq 0$ p.p. dans Ω et on a même
 $Z_- > 0$ p.p. sur Ω

4) si $E = \{x_0\}$, Z_- est solution de l'équation linéarisée en (λ^*, u^*)
c'est à dire: $AZ_- - \lambda^* F'(u^*) Z_- = F(u^*)$ au sens des distribu-
tions et p.p. dans Ω (Z_- est donc la solution du linéarisé de
l'équation au sens classique).

Remarque II.4 : en un point de transition $S_{u^*} = \overline{C(K, u^*)}$ et

$$S_{u^*} - S_{u^*} = H_0^1(\Omega).$$

Remarque II.5 : si f est convexe, l'hypothèse implique qu'on est avant
le premier point de retournement de la branche equation, s'il existe ([38]).

Démonstration du corollaire II.2 : on peut appliquer le corollaire II.1, donc seuls les points 3) et 4) restent à prouver.

a) Soit $E = \{u^* = \psi\}$ défini comme dans [66] :

$(Z_- - Z_+)^-$ est positive p.p. sur Ω donc q.p. sur E , où w^- désigne la partie négative de w pour $w \in H_0^1(\Omega)$.

Donc $(Z_- - Z_+)^- \in -\overline{C(K, u^*)}$

Les I.V. $(I.3)_-$ et $(I.3)_+$ impliquent :

$$a(Z_-, h) - \lambda^* (F'(u^*) Z_-, h) \geq (F(u^*), h) \quad \forall h \in -\overline{C(K, u^*)}$$

$$a(Z_+, -h) - \lambda^* (F'(u^*) Z_+, -h) \geq (F(u^*), -h) \quad \forall h \in -\overline{C(K, u^*)}$$

Faisons la somme et prenons $h = (Z_- - Z_+)^-$

$$a((Z_- - Z_+)^-, (Z_- - Z_+)^-) - \lambda^* (F'(u^*) (Z_- - Z_+)^-, (Z_- - Z_+)^-) \leq 0$$

$$\Rightarrow (Z_- - Z_+)^- = 0 \text{ pp} \quad \text{donc} \quad \underline{Z_- \geq Z_+ \text{ pp dans } \Omega}.$$

b) Soit $k \in H_0^1(\Omega)$, $k \geq 0$ sur Ω alors $k + Z_- \geq 0$ sur Ω donc qp sur E .

On prend $h = k + Z_- \in -\overline{C(K, u^*)}$ dans $(I.3)_-$:

$$a(Z_-, k) \geq \lambda^* (F'(u^*) Z_-, k) + (F(u^*), k) \geq 0 \quad \forall k \in H_0^1(\Omega), k \geq 0 \text{ avec}$$

$Z_- \in H_0^1(\Omega)$ et $Z_- \not\equiv 0$ puisque $F(u^*) \not\equiv 0$ implique qu'il existe $k \geq 0$ tq $(F(u^*), k) > 0$. On peut en déduire que $\underline{Z_- > 0 \text{ pp sur } \Omega}$; en effet sinon puisque $Z_- \geq 0$ sur Ω il existerait une boule $B \subset \Omega$ telle que $\text{ess. inf}_B Z_- = \text{ess. inf}_\Omega Z_- = 0$. Le principe du maximum fort pour les solutions généralisées ([47] Théorème 8.19) implique que Z_- est constante sur Ω et $Z_- \in H_0^1(\Omega)$ donc $Z_- \equiv 0$ ce qui est impossible.

On peut définir [62]) $I(Z_-)$ par ${}^c I(Z_-) = \{x \in \Omega \text{ tq } Z_-(x) > 0 \text{ au sens de } H_0^1(\Omega)\}$

$I(Z_-) \subset E$ et $AZ_- - \lambda^* F'(u^*)Z_- - F(u^*) = \mu$ est une mesure positive à support dans $I(Z_-)$ car Z_- est solution de $(I.3)_-$ ([62]) .

c) supposons $E = \{x_0\}$

si $n > 1$ on a $\text{cap } E = 0$ et $\text{cap } I(Z_-) = 0$;

or μ est une mesure qui s'annule sur les ensembles de capacité nulle, donc $AZ_- - \lambda^* F'(u) Z_- - F(u^*) = 0$ au sens des distributions.

si $n = 1$ on a $Z_- \in C^0(\bar{\Omega})$, donc $I(Z_-) = \{x \in \Omega \text{ tq } Z_-(x) = 0\} = \emptyset$ et on a aussi $AZ_- - \lambda^* F'(u) Z_- - F(u^*) = 0$ au sens des distributions et pp par régularité.

□

II.2 Existence d'un développement

Théorème II.1

si $\inf \{a(w,w) - \lambda^* (F'(u)w,w) / w \in S_{u^*} - S_{u^*}, ||w|| = 1\} > 0$ alors :

1) il existe une unique direction conique à droite (respectivement à gauche) en (λ^*, u^*) , notée Z_+ (resp Z_-) solution de $(I.3)_+$ (resp. de $(I.3)_-$)

2) il existe $\eta > 0$ et une multi-application $\theta_+ : (0, \eta) \rightarrow H_0^1(\Omega)$
(resp. $\theta_- : (-\eta, 0) \rightarrow H_0^1(\Omega)$)

telle que $u^* + t Z_+ + t \theta_+(t)$ soit solution de (I.1) pour $\lambda = \lambda^* + t$
(resp $u^* + t Z_- + t \theta_-(t)$ soit solution de (I.1) pour $\lambda = \lambda^* + t$) ;
de plus $||\theta_+(t)|| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0_+$ (resp $||\theta_-(t)|| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0_-$)

Remarque II.4

Si S_{u^*} est un espace vectoriel l'hypothèse du Théorème II.1 qui s'écrit alors : $\inf \{a(w,w) - \lambda^* (F'(u^*)w,w) / w \in S_{u^*}, ||w|| = 1\} > 0$ peut être affaiblie. On montrera que dans le cas vectoriel, la régularité de (λ^*, u^*) est suffisante pour assurer l'existence d'un développement à droite et à gauche.

Démonstration du Théorème II.1

Seul le 2) reste à prouver. On raisonne pour $t > 0$:

a) Formulation du problème en termes de point fixe

Soient $t > 0$, $\theta \in H^1_0(\Omega)$; on a, d'après la formule de dérivation conique (I.5) :

$$\begin{aligned} P_K [(\lambda^* + t) GF(u^* + tZ_+ + t\theta)] &= P_K [\lambda^* GF(u^*)] + \\ &+ t P_{S_{u^*}} [\lambda^* GF'(u^*)(Z_+ + \theta) + GF(u^*)] + t \varepsilon(t, \theta) = \\ &= u^* + t P_{S_{u^*}} [\lambda^* GF'(u^*)(Z_+ + \theta) + GF(u^*)] + t \varepsilon(t, \theta) \end{aligned}$$

avec $\lim_{t \rightarrow 0_+} \varepsilon(t, \theta) = 0$ uniformément par rapport à θ , θ borné dans $H^1_0(\Omega)$

d'où $(\lambda^* + t, u^* + tZ_+ + t\theta)$ est solution de (I.1)

$$\Leftrightarrow (I.1') \quad u^* + tZ_+ + t\theta = P_K [(\lambda^* + t) GF(u^* + tZ_+ + t\theta)]$$

$$\Leftrightarrow (I.5) \quad Z_+ + \theta = P_{S_{u^*}} [\lambda^* GF'(u^*)(Z_+ + \theta) + GF(u^*)] + \varepsilon(t, \theta)$$

$$\Leftrightarrow \theta = R(\varepsilon(t, \theta)) - Z_+ \quad \text{où } R = R_K, \quad k = GF(u^*)$$

avec les notations du lemme II.1 ; remarquons aussi que $Z_+ = R(0)$;

on est donc ramené à chercher un point fixe de $\theta \rightarrow R(\varepsilon(t, \theta)) - R(0)$

b) Existence de la multiapplication $t \rightarrow \theta_+(t)$

on a, par (I.5), $\varepsilon(t, \theta) = \frac{1}{t} P_K [(\lambda^* + t) GF(u^* + tZ_+ + t\theta)] -$

$$- \frac{u^*}{t} - P_{S_{u^*}} [\lambda^* GF'(u^*)(Z_+ + \theta) + GF(u^*)]$$

donc $\forall t > 0$ fixé,

$\theta \rightarrow \varepsilon(t, \theta)$ est compacte de $H^1_0(\Omega)$ dans lui-même.

Comme R est lipschitzienne de $H^1_0(\Omega)$ dans lui-même, $\theta \rightarrow R(\varepsilon(t, \theta)) - R(0)$ est aussi compacte de $H^1_0(\Omega)$ dans lui-même.

D'autre part, $\exists \eta > 0$ tq $\forall t \in (0, \eta)$ on ait :

$$||\varepsilon(t, \theta)|| \leq \frac{1}{L} \quad \forall \theta \in H^1_0(\Omega), \quad ||\theta|| \leq 1 \text{ d'où}$$

$$||R(\varepsilon(t, \theta)) - R(0)|| \leq 1$$

Donc $\forall t \in (0, \eta)$, l'application $\theta \rightarrow R(\varepsilon(t, \theta)) - R(0)$ envoie la boule unité du $H^1_0(\Omega)$ dans elle-même.

On peut donc appliquer un Théorème de point fixe de Schauder ; ainsi si $0 < t < \eta$ on définit une multiapplication

$$t \rightarrow \theta_+(t) \in H^1_0(\Omega), \quad ||\theta_+(t)|| \leq 1 \text{ telle que}$$

$$\theta_+(t) = R(\varepsilon(t, \theta_+(t))) - R(0) \Rightarrow$$

$$u^* + t Z_+ + t \theta_+(t) = P_K [(\lambda^* + t) GF(u^* + t Z_+ + t \theta_+(t))]$$

c) Propriété de $\theta_+(t)$

$$\text{On a } \theta_+(t) = R(\varepsilon(t, \theta_+(t))) - R(0) \Rightarrow$$

$||\theta_+(t)|| \leq L ||\varepsilon(t, \theta_+(t))||$ qui tend vers 0 lorsque $t \searrow 0_+$ uniformément pour $||\theta_+(t)|| \leq 1$.

□

III. ETUDE LOCALE LORSQUE S_{u^*} est un espace vectoriel

III.1 Etude plus précise de S_{u^*}

Proposition III.1

Soit (λ^*, u^*) une solution de (I.1)

Soit $E \neq \emptyset$ l'ensemble de coïncidence $\{u^* = \psi\}$ défini comme dans [66].

Si $\bar{E} = E$, si ∂E est régulière et si $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ est telle que l'application $x \rightarrow A \psi(x) - \lambda^* F(\psi)(x)$ ne s'annule pas sur E ,

Alors S_{u^*} est un espace vectoriel :

$$S_{u^*} = \{ w \in H^1_0(\Omega) / w = 0 \text{ q.p. sur } E \}$$

De plus si γw désigne la trace sur ∂E de w , on a :

$$\forall w \in S_{u^*}, \gamma w = 0, \text{ donc } w|_{\Omega-E} \in H^1_0(\Omega - E)$$

Remarque III.1

1°) Ce résultat reste vrai si l'on affaiblit l'hypothèse sur ψ :

$$\psi \in W^{2,p}(\Omega), p \geq 2 \text{ et : soit } A\psi(x) - \lambda^* F(\psi)(x) > 0 \text{ pp sur } E,$$

$$\text{soit } A\psi(x) - \lambda^* F(\psi)(x) < 0 \text{ pp sur } E;$$

2°) Si (λ^*, u^*) est un point de transition équation - inéquation

$$\text{tel que } E = \{x_0\} \text{ et } n = 1 \text{ alors } S_{u^*} = \{w \in H^1_0(\Omega) / w(x_0) \leq 0\}$$

n'est pas un espace vectoriel mais on est dans le cas où $\bar{E} \neq E$

Démonstration de la proposition III.1

1°) Montrons que $S_{u^*} \subset \{w \in H^1_0(\Omega) / w = 0 \text{ pp sur } E\}$

Par hypothèse $(A\psi)^- \in L^2(\Omega)$, on a par les théorèmes de régularité, $u^* \in H^2(\Omega)$ ([20]).

Soit $w \in S_{u^*}$:

$$a(u^*, w) = \int_{\Omega} Au^*(x)w(x) dx \text{ en appliquant la formule de Green ;}$$

$$\text{mais } a(u^*, w) = \lambda^* (F(u^*), w) \text{ car } w \in S_{u^*}$$

$$\text{donc } \int_{\Omega} (Au^*(x)w(x) - \lambda^* F(u^*)(x)w(x)) dx = 0$$

Soit $I(u^*)$ défini comme dans [62] par $^C I(u^*) = \{u^* < \psi \text{ au sens de } H^1_0(\Omega)\}$; alors $I(u^*)$ et E diffèrent d'un ensemble de mesure nulle ainsi que leurs complémentaires.

De plus $Au^* - \lambda^* F(u^*)$ est une mesure à support dans $I(u^*)$ d'après [62]

$$\text{donc } \int_{\Omega-E} (Au^*(x) - \lambda^* F(u^*)(x))w(x) dx = 0$$

comme $Au^* = A\psi$ pp sur E d'après le lemme de Stampacchia,

$$\text{on a : } \int_E (A\psi(x) - \lambda^* F(\psi)(x))w(x) dx = 0.$$

Or $w \leq 0$ qp sur E et par hypothèse $x \rightarrow A\psi(x) - \lambda^* F(\psi)(x)$ garde un signe constant sur E , donc $w = 0$ pp sur E .

2°) Montrons que si $w \in H^1_0(\Omega)$ est tel que $w = 0$ pp sur E alors $\gamma w = 0$

Par hypothèse $\overset{\circ}{E} = E$ donc $\partial E = \partial \overset{\circ}{E}$

On suppose aussi que $\partial E = \partial \overset{\circ}{E}$ est régulière (c'est à dire ∂E de classe C^1 et $\overset{\circ}{E}$ est localement d'un seul côté de ∂E);

ainsi $\forall w \in H^1_0(\Omega)$ on peut définir $\gamma w =$ trace de w sur $\partial \overset{\circ}{E}$.

Puisque $w \in H^1(\overset{\circ}{E})$, on a $\gamma w \in H^{1/2}(\partial \overset{\circ}{E})$ et :

$$\|\gamma w\|_{H^{1/2}(\partial \overset{\circ}{E})} \leq C \|w\|_{H^1(\overset{\circ}{E})} = C \left(\int_{\overset{\circ}{E}} w^2 dx + \int_{\overset{\circ}{E}} \nabla w^2 dx \right)$$

Mais sur $\overset{\circ}{E}$, $w = 0$ p.p. et par le lemme de Stampacchia, $\nabla w = 0$ p.p. sur $\overset{\circ}{E} \Rightarrow \gamma w = 0$.

3°) Montrons que si $w \in S_{u^*}$ alors $w = 0$ qp sur E .

$$\text{soit } w \in S_{u^*}; \text{ posons } v = \begin{cases} w & \text{sur } \Omega - E \\ 0 & \text{sur } E \end{cases}$$

puisque γw , trace de w sur $\partial E = \partial \overset{\circ}{E}$ est nul, on a : $v \in H^1_0(\Omega)$ et $\|v - w\| = 0$ donc v et w admettent des représentants quasicontinus égaux qp.

$\Rightarrow w = 0$ qp sur E ([62], Appendice).

4°) Réciproque :

soit $w \in H^1_0(\Omega)$ tel que $w = 0$ qp sur E ; on a $w \in \overline{C(K, u^*)}$ et $a(u^*, w) - \lambda^* (F(u^*), w) = \int_E (Au^*(x) - \lambda^* F(u^*)(x)) w(x) dx = 0$ donc $w \in S_{u^*}$

□

III.2 Développement autour d'un point régulier, dans le cas vectoriel

On se place dans le cas où S_{u^*} est un espace vectoriel ce qui correspond, en pratique, à au moins deux cas :

- 1) $E \neq \emptyset$, $\bar{E} = E$, ∂E régulier où $E = \{u^* = \psi\}$ (cf III.1)
- 2) aux points de transition tels que si $E = \{u^* = \psi\}$, $\text{cap } E = 0$ (cas classique: $E = \{x_0\}$ et $n > 1$).

Soit (λ^*, u^*) un point régulier de (I.1) tel que S_{u^*} soit un espace vectoriel, alors l'application $w \mapsto w - P_{S_{u^*}} [\lambda^* GF'(u^*) w]$ est linéaire continue bijective de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. On notera Q son inverse. De plus, il existe une unique direction conique Z (à droite et à gauche) en (λ^*, u^*) . (Obtenue par $Z = Q [P_{S_{u^*}} [GF(u^*)]]$).

Théorème III.1

Soit (λ^*, u^*) un point régulier de (I.1) tel que S_{u^*} soit un espace vectoriel. Alors :

1) il existe une unique direction conique Z (à droite et à gauche) en (λ^*, u^*) .

2) il existe $\eta > 0$ et une multiapplication θ :

$$\begin{aligned}]-\eta, \eta[&\rightarrow H_0^1(\Omega) \\ t &\rightarrow \theta(t) \end{aligned}$$

tels que $(\lambda^* + t, u^* + tZ + t\theta(t))$ soit solution de (I.1).

De plus on a : $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \|\theta(t)\| = 0$

Remarque III.2

On a donc obtenu, comme avec le Théorème II.1, un développement à droite et à gauche autour de (λ^*, u^*) mais sans supposer que $\inf \{a(w, w) - \lambda^* (F'(u^*)w, w) / w \in S_{u^*}, \|w\| = 1\}$ soit > 0 . Par contre cette hypothèse semble nécessaire pour montrer que $Z \geq 0$ pp sur Ω .

Démonstration du Théorème III.1

Seul le 2) reste à prouver.

On raisonne comme pour démontrer le Théorème II.1 :

soient $t > 0$ et $\theta \in H^1_0(\Omega)$; d'après la formule de dérivation conique (I.5) on a :

$$P_K[(\lambda^* + t) GF(u^* + tZ + t\theta)] = P_K[\lambda^* GF(u^*)] + \\ + t P_{S_{u^*}}[\lambda^* GF'(u^*)(Z + \theta) + GF(u^*)] + t \varepsilon(t, \theta)$$

avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t, \theta) = 0$ uniformément par rapport à θ , θ borné dans $H^1_0(\Omega)$.

De plus $P_{S_{u^*}}$ est dans ce cas un opérateur linéaire et Z est solution de (I.3)' :

$$d'où P_K[(\lambda^* + t) GF(u^* + tZ + t\theta)] = u^* + tZ + t P_{S_{u^*}}[\lambda^* GF'(u^*)\theta] + t \varepsilon(t, \theta)$$

et $((\lambda^* + t), u^* + tZ + t\theta)$ est solution de (I.1)

$$\Leftrightarrow (I.1)' \quad u^* + tZ + t\theta = P_K[(\lambda^* + t) GF(u^* + tZ + t\theta)]$$

$$\Leftrightarrow \theta = Q(\varepsilon(t, \theta)) \text{ d'après (I.5) et en appliquant l'inverse } Q.$$

On est donc ramené à un problème de point fixe ; $\theta \rightarrow \varepsilon(t, \theta)$ vérifiant les mêmes propriétés que dans la démonstration du Théorème II.1 ; on peut encore appliquer le Théorème du point fixe de Schauder à $\theta \rightarrow Q(\varepsilon(t, \theta))$, $t > 0$, et prouver l'existence d'une multiapplication $t \rightarrow \theta(t)$ telle que

$(\lambda^* + t, u^* + tZ + t\theta(t))$ soit solution de (I.1), puis refaire le même travail pour $t < 0$.

□

III.3 Développement autour d'un point singulier, dans le cas vectoriel

Hypothèses et notations

Soit (λ^*, u^*) un point singulier de (I.1) et S_{u^*} un espace vectoriel. L'application $H : w \rightarrow w - P_{S_{u^*}}[\lambda^* GF'(u^*)w]$ est linéaire continue de $H^1_0(\Omega)$ dans lui-même.

On suppose que $\text{Ker } H$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 ;
on choisit un générateur ϕ de $\text{Ker } H$ et un supplémentaire Z de ce noyau.

On suppose dans cette partie que $n \leq 3$ et qu'on a modifié au besoin
 $f(x,t)$ lorsque $t \notin [0, |\psi|_\infty]$ pour que l'opérateur $F'' : L^2(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$
vérifie : $\exists K > 0$ tq. $\forall (v,w) \in L^2(\Omega)$, $\forall x \in \Omega$:

$$|F''(v)(x) - F''(w)(x)| \leq K|v(x) - w(x)|$$

Lemme III.1

Sous les hypothèses précédentes , on a :

$\text{Im } H$ est fermé de codimension 1 dans $H^1_0(\Omega)$

$$\text{Im } H = (\mathbb{R} GF'(u^*)\phi)^\perp$$

et H admet un pseudoinverse $Q: \text{Im } H \rightarrow Z$ linéaire continu
pour la topologie de $H^1_0(\Omega)$.

Théorème III.2

Sous les hypothèses précédentes et si de plus $(F(u^*), \phi) \neq 0$
il existe $\eta > 0$ et une multiapplication

$$\begin{cases} (0, \eta) \rightarrow \mathbb{R} \times H^1_0(\Omega) \\ s \rightarrow (\tau(s), z(s)) \quad z(s) \in Z \end{cases}$$

telle que $(\lambda^* + s\tau(s), u^* + s\phi + sz(s))$ soit solution de (I.1) ;
de plus $\tau(s) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow 0^+$ et $\|z(s)\| \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow 0^+$;
on a un résultat analogue pour $-\eta < s < 0$

Remarque III.3

Puisque $\phi \in S_{u^*}$ on a :

$$a(P_{S_{u^*}}[GF(u^*)], \phi) = a(GF(u^*), \phi) = (F(u^*), \phi).$$

Démonstration du lemme III.1

- L'application $w \rightarrow P_{S_{u^*}}[\lambda^* GF'(u^*)w]$ est compacte linéaire de $H^1_0(\Omega)$
dans lui-même ;

On a donc les résultats de l'alternative de Fredholm pour H :

$\text{Im } H$ est fermé, $\text{codim } \text{Im } H = \dim \text{Ker } H = 1$ et si Z est un supplémentaire de $\text{Im } H$:

$$\forall f \in \text{Im } H \quad \exists ! u \in Z \text{ tq } H(u) = f ; \text{ on pose } Q(f) = u$$

On définit ainsi un pseudoinverse $Q : \text{Im } H \rightarrow Z$ linéaire continu.

- Montrons que $\text{Im } H = (\mathbb{R} F'(u^*)\phi)^\perp = (\mathbb{R} GF'(u^*)\phi)^\perp$, où \perp et \perp_2 désignent l'orthogonalité pour (\cdot, \cdot) et $a(\cdot, \cdot)$.

soit $w \in \text{Im } H, \exists y \in H_0^1(\Omega)$ tq $w = y - P_{S_{u^*}}[\lambda^* GF'(u^*)y]$
d'où $\forall h \in S_{u^*}, a(\lambda^* GF'(u^*)y - y + w, h) = 0$
en particulier si $h = \phi$ on obtient :

$$a(y - w, \phi) = a(\lambda^* GF'(u^*)y, \phi)$$

mais $y - w \in S_{u^*}$ et $\phi = P_{S_{u^*}}[\lambda^* GF'(u^*)\phi]$

$$\Rightarrow a(y - w, \phi) = (\lambda^* F'(u^*)\phi, w)$$

$$\Rightarrow (F'(u^*)y, \phi) = (F'(u^*)\phi, y) - (F'(u^*)\phi, w)$$

par conséquent $(F'(u^*)\phi, w) = 0$

conclusion : $\text{Im } H \subset (\mathbb{R} F'(u^*)\phi)^\perp$ et lui est égal car ils ont même codimension.

□

Démonstration du théorème III.2

On utilise la même démarche que pour démontrer le Théorème II.1 et le théorème III.1.

Considérons $s > 0, z \in H_0^1(\Omega)$ et $\tau \in \mathbb{R}$

1°) Formulation du problème en termes de point fixe

D'après le paragraphe I.4, par dérivation conique on a :

$$\forall h \in H_0^1(\Omega), P_K[\lambda^* GF(u^*) + h] = u^* + P_{S_{u^*}}[h] + ||h|| \varepsilon(||h||, \frac{h}{||h||})$$

avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t, k) = 0$ uniformément par rapport à k , k restant dans un compact de $H_0^1(\Omega)$

Lorsqu'on fait pour F un développement de Taylor avec reste intégral au voisinage de u on a :

$$P_K[(\lambda^* + s \tau) GF(u^* + s(\phi + z))] = u^* + P_{S_{u^*}}[h(\tau, s, z)] + \\ + ||h(\tau, s, z)|| R(h(\tau, s, z))$$

avec $R(h) = \varepsilon(||h||, \frac{h}{||h||})$,

$r(s, z) = \int_0^1 F''(u^* + ts(\phi + z))(\phi + z, \phi + z) dt$ étant le reste intégral du développement de Taylor de F .

$$h(\tau, s, z) = s [\tau \{GF(u^*) + s GF'(u^*)(\phi + z) + s^2 Gr(s, z)\} + \\ + \lambda^* GF'(u^*)(\phi + z) + \lambda^* s Gr(s, z)] = s k(\tau, s, z).$$

donc $h(\tau, s, z) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow 0$ uniformément par rapport à (τ, z) tq $|\tau| \leq 1, ||z|| \leq 1$

de plus $\frac{h(\tau, s, z)}{||h(\tau, s, z)||}$ reste dans un compact de $H^1_0(\Omega)$

lorsque $|s| \leq 1, |\tau| \leq 1$, et $||z|| \leq 1$

donc $R(h(\tau, s, z)) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow 0$ uniformément par rapport à (τ, z) tq $|\tau| \leq 1$ et $||z|| \leq 1$.

Le fait que $(\lambda^* + s \tau, u^* + s \phi + s z)$ soit solution de (I.1) s'exprime, de façon équivalente, sous la forme :

$$H(z) = \tau P_{S_{u^*}}[GF(u^*) + s GF'(u^*)(\phi + z) + s^2 Gr(s, z)] \\ + P_{S_{u^*}}[\lambda^* s Gr(s, z)] + \frac{1}{s} R(h(\tau, s, z)) ||h(\tau, s, z)||$$

En utilisant le pseudoinverse Q de H , il est possible d'écrire cette équation en termes de point fixe ; pour cela il faut que le membre de droite appartienne à $\text{Im } H$, condition que l'on peut exprimer plus simplement grâce à la propriété suivante :

$$\forall k \in L^2(\Omega), \lambda^* (P_{S_{u^*}}[Gk], F'(u^*)\phi) = (k, \phi)$$

$$\text{car } \phi = P_{S_{u^*}}[\lambda^* GF'(u^*)\phi]$$

On cherche donc à résoudre le problème sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = A(s, \tau, z) = - \frac{(|k(\tau, s, z)| |R(h(\tau, s, z)), F'(u^*)\phi) + s \lambda^*(r(s, z), \phi)}{(F(u^*) + s F'(u^*)(\phi + z) + s^2 r(s, z), \phi)} \\ \\ z = B(s, \tau, z) = Q [A(s, \tau, z) P_{S_{u^*}} [GF(u^*) + s GF'(u^*)(\phi + z) + s^2 Gr(s, z)] + \\ + P_{S_{u^*}} [\lambda^* s Gr(s, z) + R(h(\tau, s, z)) |k(\tau, s, z)| |]] \end{array} \right.$$

Remarques : . On aura $z \in Z$

. L'hypothèse de transversalité $(F(u^*), \phi) \neq 0$ permet d'affirmer que pour s voisin de 0, le dénominateur de A est non nul.

2°) Propriétés des applications A et B

Considérons l'espace $\mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $||(\tau, z)|| = \max(|\tau|, ||z||)$
On montre que :

- a) L'application $(\tau, z) \rightarrow (A(s, \tau, z), B(s, \tau, z))$ est compacte de $\mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$ dans lui-même et ceci pour tout $s > 0$
- b) $A(s, \tau, z) \rightarrow 0$ uniformément par rapport à (τ, z) t.q. $||(\tau, z)|| \leq 1$
 $s \rightarrow 0^+$
- c) $\exists \eta' > 0$ t.q. si $0 < s < \eta'$ $\forall (\tau, z)$ t.q. $||(\tau, z)|| \leq 1$ on ait :
 $|A(s, \tau, z)| \leq 1$ et $||B(s, \tau, z)|| \leq 1$;

On peut alors conclure à l'existence du développement en appliquant le Théorème du point fixe de Schauder.

3°) Démontrons le résultat a)

Soit (τ_p, z_p) une suite de $\mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$ telle que $||(\tau_p, z_p)|| \leq 1 \quad \forall p \in \mathbb{N}$.
Puisque $n \leq 3$, on sait que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ injection continue
 $\hookrightarrow L^4(\Omega)$ injection compacte

donc on peut extraire une sous-suite de (τ_p, z_p) encore notée (τ_p, z_p) telle que : il existe $\tau \in \mathbb{R}$ tq $\tau_p \rightarrow \tau$

il existe $M > 0$ tq $\forall p \quad |z_p|_6 \leq M$

et il existe $z \in H^1_0(\Omega)$ tq $z_p \rightarrow z$ dans $L^4(\Omega)$.

On veut montrer que $(A(s, \tau_p, z_p), B(s, \tau_p, z_p))$ converge vers $(A(s, \tau, z), B(s, \tau, z))$ dans $\mathbb{R} \times H^1_0(\Omega)$ lorsque $p \rightarrow +\infty$.

Montrons la partie la plus délicate, la convergence de $r(s, z_p)$ vers $r(s, z)$ dans $L^2(\Omega)$:

C désignant au cours de la démonstration des constantes diverses, on a :

$$\begin{aligned} |r(s, z_p) - r(s, z)|^2_2 &\leq C \int_0^1 (1-t)^2 dt \int_{\Omega} [F''(u^* + st\phi + stz_p)(\phi + z_p)^2 - \\ &\quad - F''(u^* + st\phi + stz)(\phi + z)^2]^2 dx \\ &\leq C \int_0^1 (1-t)^2 dt \int_{\Omega} [F''(u^* + st\phi + stz_p) - \\ &\quad - F''(u^* + st\phi + stz)]^2 (\phi + z_p)^4 dx \\ &\quad + C \int_0^1 (1-t)^2 dt \int_{\Omega} F''(u^* + st\phi + stz)^2 [(\phi + z_p)^4 \\ &\quad - (\phi + z)^4] dx \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} [F''(u^* + st\phi + stz_p) - F''(u^* + st\phi + stz)]^2 (\phi + z_p)^4 dx \\ &\leq C \varepsilon^2 + \int_{|z_p - z| \geq \varepsilon} C (\phi + z_p)^4 dx \leq C \varepsilon^2 + C \left(\int_{|z_p - z| \geq \varepsilon} 1 \right)^{1/3} \end{aligned}$$

or $z_p \rightarrow z$ dans $L^4(\Omega)$ donc en mesure
 $p \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \exists p_0 \text{ tq } \forall p \geq p_0, \forall t \text{ tq } 0 \leq t \leq 1: &\int_{\Omega} [F''(u^* + st\phi + stz_p) - \\ &- F''(u^* + st\phi + stz)]^2 (\phi + z_p)^4 dx \leq C \varepsilon^2 \end{aligned}$$

d'autre part $F''(u^* + st\phi + stz) \in L^\infty(\Omega)$ et $z_p \rightarrow z$ dans $L^4(\Omega)$

donc $\int_{\Omega} F''(u^* + st\phi + stz)^2 [(\phi + z_p)^2 - (\phi + z)^2] \rightarrow 0$ uniformément par rapport à t

ceci permet donc de prouver que $r(s, z_p) \rightarrow r(s, z)$ dans $L^2(\Omega)$ lorsque $p \rightarrow +\infty$

La convergence des autres termes intervenant dans $A(s, \tau_p, z_p)$ et $B(s, \tau_p, z_p)$ est plus simple à démontrer.

Pour démontrer les points b) et c) on utilise le fait que $R(h(\tau, s, z)) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow 0$ uniformément par rapport à (τ, z) , $|\tau| \leq 1$ $\|z\| \leq 1$ et que $k(\tau, s, z)$ et $r(s, z)$ sont bornés dans les mêmes conditions.

□

-ANNEXE-

VALIDITE ET INTERPRETATION DE LA CONDITION (S) :
 $\inf \{a(w,w) - \lambda(F'(u)w,w) / w \in Su-Su, |w| = 1\} > 0$

Soit (λ, u) une solution de l'I.V. :

$$(1) \quad \begin{cases} a(u, v-u) \geq \lambda(F(u), v-u) \\ \forall v \in K; u \in K \end{cases}$$

les notations et hypothèses sont celles utilisées dans tout le chapitre. On a vu que la condition (S) permettait de démontrer l'existence d'un développement local dans le cas général. Il est intéressant d'analyser cette condition (S) :

$$v_1 = \inf \{a(w,w) - \lambda(F'(u)w,w) / w \in Su-Su, |w| = 1\} > 0$$

et de voir où elle est vérifiée.

Rappelons que pour une équation (ou une branche équation d'une I.V.), v_1 est la valeur propre fondamentale du problème linéarisé :

$$(2) \quad \begin{cases} Aw - \lambda F'(u)w = v_1 w & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

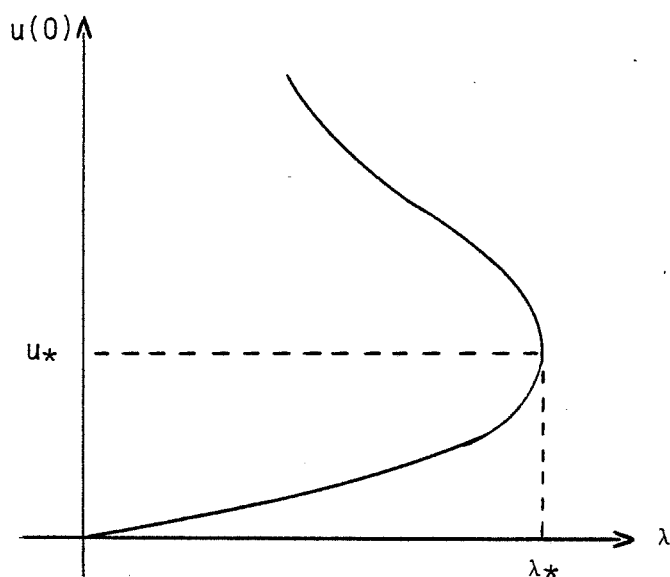
Dans le cas d'une inéquation, on peut estimer facilement v_1 au moins dans deux cas :

- . au point de transition car $Su-Su = H_0^1(\Omega)$, v_1 est encore la valeur propre fondamentale du linéarisé (2)
- . en un point de la branche inéquation, avec des hypothèses pour que $Su = \{w \in H_0^1 / w = 0 \text{ q.p sur } \{u = \Psi\}\}$ (en particulier avec de la régularité sur $\partial\{u = \Psi\}$) : v_1 est alors la valeur propre fondamentale du linéarisé dans le complémentaire de l'ensemble de coïncidence. On va estimer v_1 dans ce dernier cas, analytiquement en dimension 1, numériquement en dimension > 1 , pour certaines classes de problèmes.

I. Etude analytique en dimension 1

On prend $A = -\Delta$, $\Omega =]-1,1[$, $\psi \equiv a > 0$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante, $f(0) > 0$ et $f''(t) \geq m > 0$ pour $t \geq 0$.

L'équation $-u'' = \lambda f(u)$, $u(-1) = u(1) = 0$ admet le diagramme de bifurcation suivant :



si on pose $u(0) = \alpha$
on a la représentation
paramétrique suivante,
avec $\alpha \in [0, \infty[$ et

$$F(z) = \int_0^z f(t)dt :$$

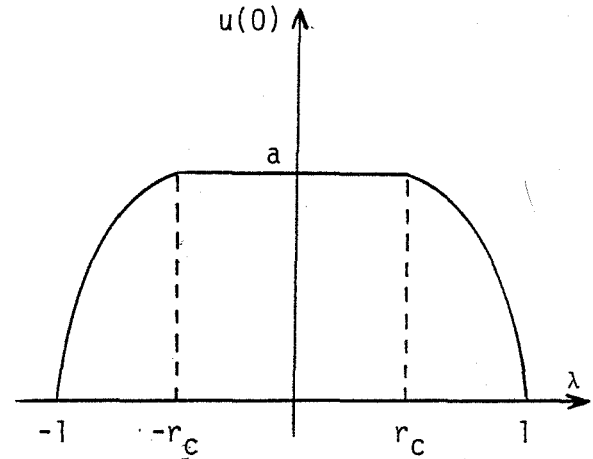
$$\sqrt{2\lambda} = \frac{\alpha}{\sqrt{F(\alpha)}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{F(\alpha t)}{F(\alpha)}}} \quad (\text{en particulier } \lambda \rightarrow 0 \text{ lorsque } \alpha \rightarrow \infty)$$

$$\sqrt{2\lambda x} = \int_0^{u(x)} \frac{dt}{\sqrt{F(\alpha) - F(t)}}$$

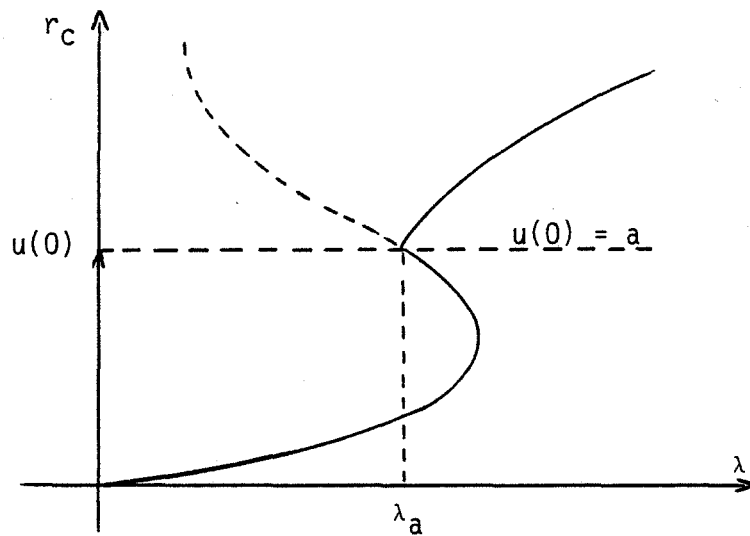
Le fait que λ soit borné et $|u|_\infty$ non borné est conséquence de résultats généraux pour des non-linéarités positives, croissantes, convexes ([37], [38], [72]).

Considérons maintenant le problème d'obstacle, dont les solutions symétriques à frontière libre non triviale vérifient :

$$(3) \quad \begin{cases} u(x) = 0 & 0 < x < r_c \\ u(r_c) = a \\ u'(r_c) = 0 \\ u'' + \lambda f(u) = 0 & r_c < x < 1 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$



Le diagramme de bifurcation a l'allure suivante :



En posant $x = (1-r_c) y + r_c$, $y \in (0,1)$ et $u(x) = v(y)$ v est solution de

$$(4) \quad \begin{cases} v(0) = a \\ v'(0) = 0 \\ v(1) = 0 \\ v'' + \lambda(1-r_c)^2 f(v) = 0 \end{cases}$$

donc v est la solution de l'équation pour $\lambda = \frac{\lambda_a}{(1-r_c)^2}$ et on a l'expression explicite de r_c :

$$r_c = 1 - \sqrt{\frac{\lambda_a}{\lambda}}$$

Pour tout $r_c > 0$, S_u s'identifie à l'espace

$$V = H_0^1((-1,1) \setminus (-r_c, r_c)) \text{ et}$$

$$v = \inf \{ (w', w') - \lambda (f'(u)w, w) / w \in V ; |w|^2 = 1 \}$$

et il est clair que cet infimum est atteint pour une fonction paire (ou impaire, au choix) \rightarrow

$$v = \inf \{ (w', w') - \lambda (f'(u)w, w) / w \in H_0^1(r_c, 1) , |w|^2 = 1 \}$$

et en posant $\phi(y) = w(r_c + (1-r_c)y) = w(x)$:

$$v = \inf \left\{ \int_0^1 \frac{1}{1-r_c} \phi'^2(y) dy - \lambda \int_0^1 f'(v) \phi^2(y) (1-r_c) dy / \right.$$

$$\left. \phi \in H_0^1(0,1) ; (1-r_c) \int_0^1 \phi^2(y) dy = 1 \right\}$$

$$= \inf \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_a}} (\phi', \phi') - \sqrt{\frac{\lambda_a}{\lambda}} (f'(v)\phi, \phi) / \phi \in H_0^1(0,1) ; \sqrt{\frac{\lambda_a}{\lambda}} |\phi|^2 = 1 \right\}$$

$$\text{On pose } \psi(y) = \left(\frac{\lambda_a}{\lambda}\right)^{\frac{1}{4}} \phi(y)$$

$$v = \frac{\lambda}{\lambda_a} \inf \{ (\psi', \psi') - \lambda_a (f'(v)\psi, \psi) / \psi \in H_0^1(0,1) ; |\psi|^2 = 1 \}$$

Si on appelle $\tilde{\psi}$ la fonction ψ complétée par imparité, v est aussi l'inf sur les $\tilde{\psi} \in H_0^1(-1,1)$ vérifiant $\tilde{\psi}(0) = 0$, $|\tilde{\psi}| = 1$, espace plus petit que l'ensemble des $\tilde{\psi}$ où la condition $\tilde{\psi}(0) = 0$ est remplacée $(\tilde{\psi}, \phi_1) = 0$ où ϕ_1 est la valeur propre fondamentale du problème linéarisé de (4), donc

$$v \geq \frac{\lambda}{\lambda_a} \inf \{ (\tilde{\psi}', \tilde{\psi}') - \lambda_a (f'(v)\tilde{\psi}, \tilde{\psi}) / \tilde{\psi} \in H_0^1(-1,1) ; (\tilde{\psi}, \phi_1) = 0, |\tilde{\psi}| = 1 \} = \frac{\lambda}{\lambda_a} \mu_2$$

où μ_2 est la deuxième valeur propre du problème :

$$\begin{cases} -w'' - \lambda_a f'(v)w = \mu w \\ w(-1) = w(1) = 0 \end{cases}$$

Supposons que la branche de l'équation associée à (1) se retourne au plus une fois; on sait alors ([38] [67]) que μ_2 est > 0 (argument déjà utilisé dans la première partie de ce chapitre), donc la condition (S) est vérifiée sur toute la branche inéquation, sauf au point de transition où $v = \mu_1$ (avec les notations ci-dessus, $Su-Su = H_0^1(-1,1)$) et μ_1 est < 0 si le point de transition se trouve après le retournement. On notera que la branche inéquation ne se retourne jamais (cf. l'expression de r_c).

II. Etude numérique dans un cas particulier en dimension n ($n = 1,2,3$)

On prend $A = -\Delta, \Omega$ la boule unité de \mathbb{R}^n , $\psi \equiv a > 0$, $f(t) = e^t$; les solutions symétriques du problème d'obstacle vérifient :

$$(5) \quad \begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r} u' + \lambda e^u = 0 & r_c < r < 1 \\ u'(r_c) = 0 \\ u(r_c) = a \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

qui a été résolu par une méthode de "tir" (cf. Chapitre IV, étude numérique du § VII, il s'agit du même problème).

Pour chaque (λ, r_c, u) , $r_c > 0$, on a calculé numériquement la valeur propre fondamentale du linéarisé :

$$(6) \quad \begin{cases} w'' + \frac{n-1}{r} w' + \lambda e^u w = \mu w \\ w(r_c) = w(1) = 0 \end{cases}$$

Les résultats apparaissent sur les figures jointes.

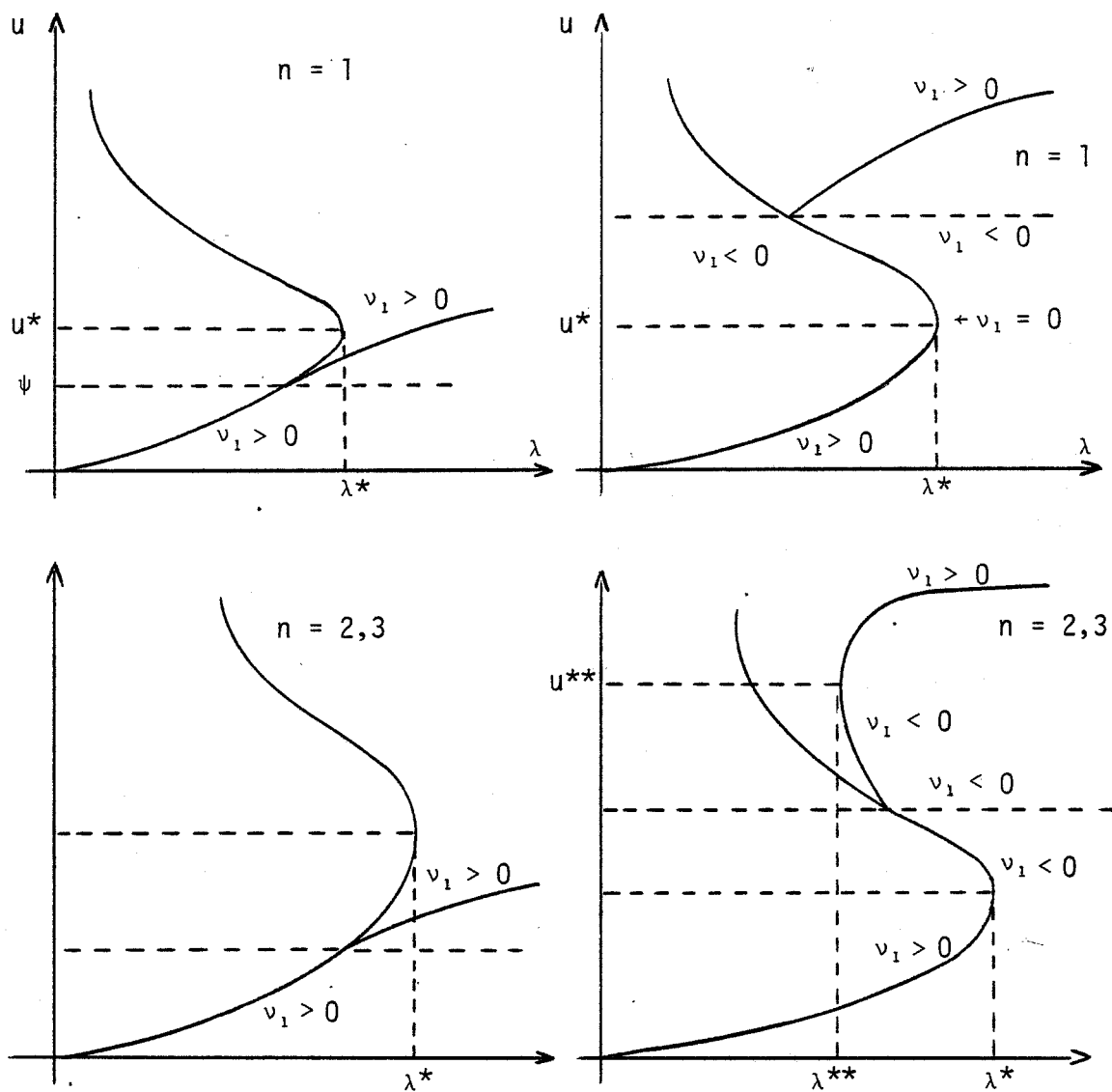
. On vérifie que pour $n = 1$, v_1 est toujours > 0 et linéaire selon λ ; la branche inéquation ne se retourne jamais.

. Pour $n > 1$, v_1 est > 0 si l'obstacle est situé en-dessous du premier point de retournement, la branche inéquation ne se retourne pas.

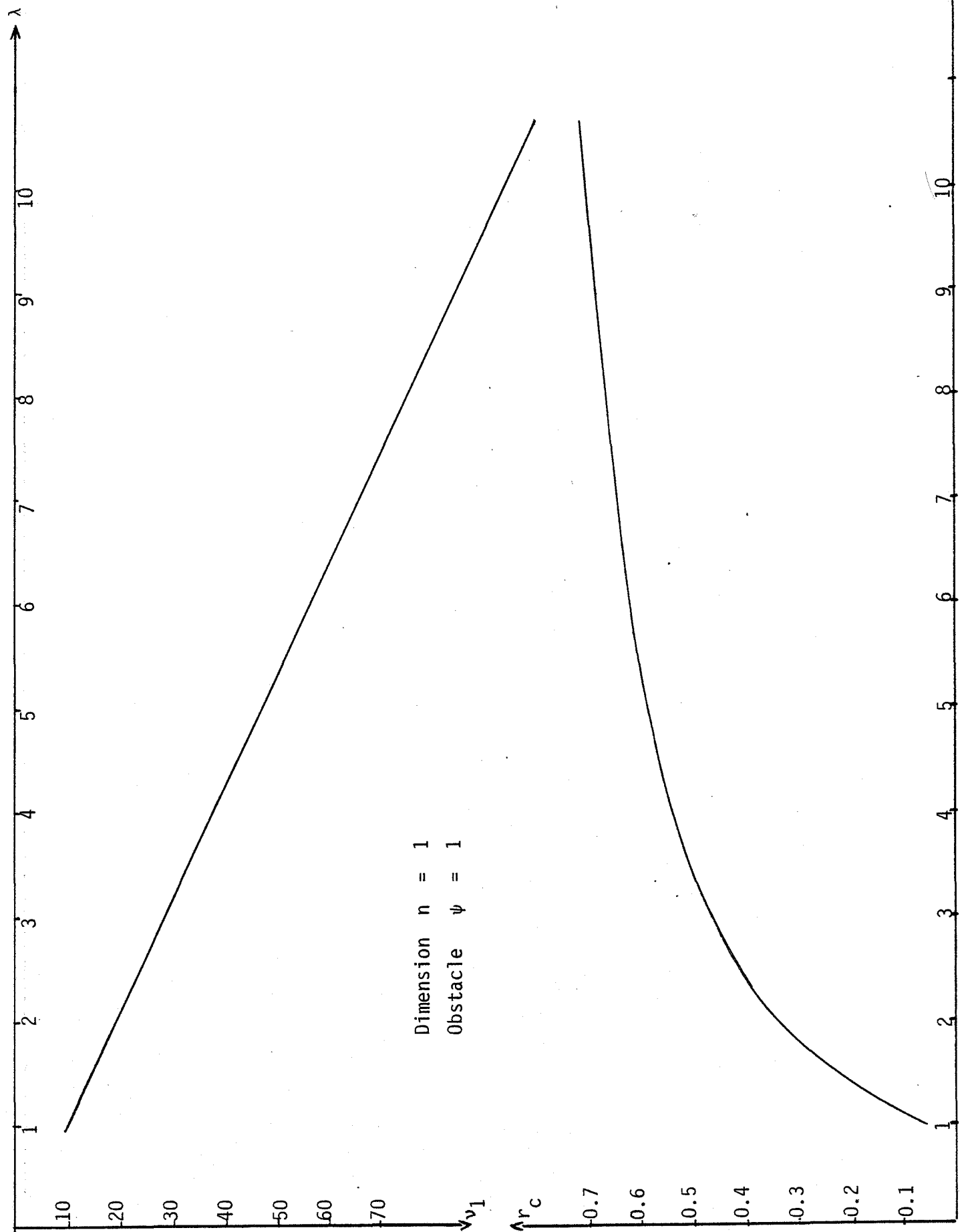
Dans le cas contraire, cette branche se retourne au moins une fois,

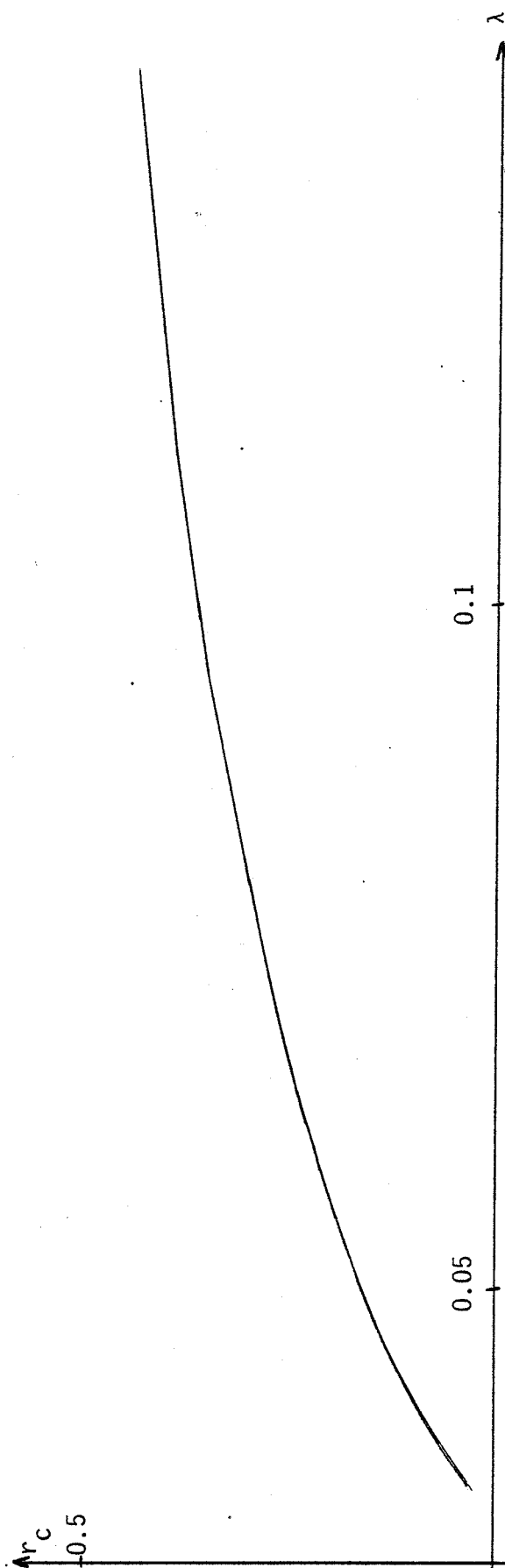
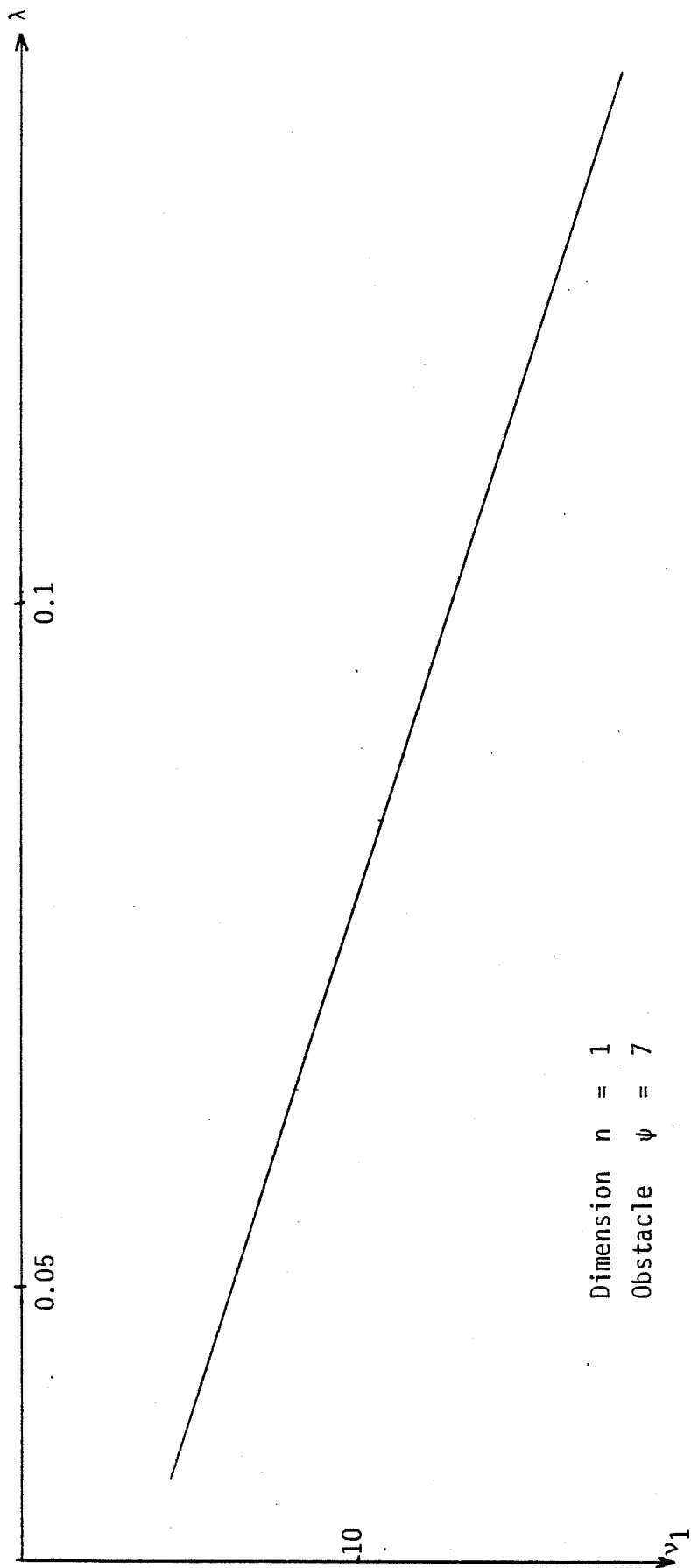
- v_1 n'est > 0 qu'après le dernier retournement.
 . Pour $n > 1$, v_1 est > 0 dans tous les cas pour λ assez grand et semble asymptotiquement linéaire en λ .

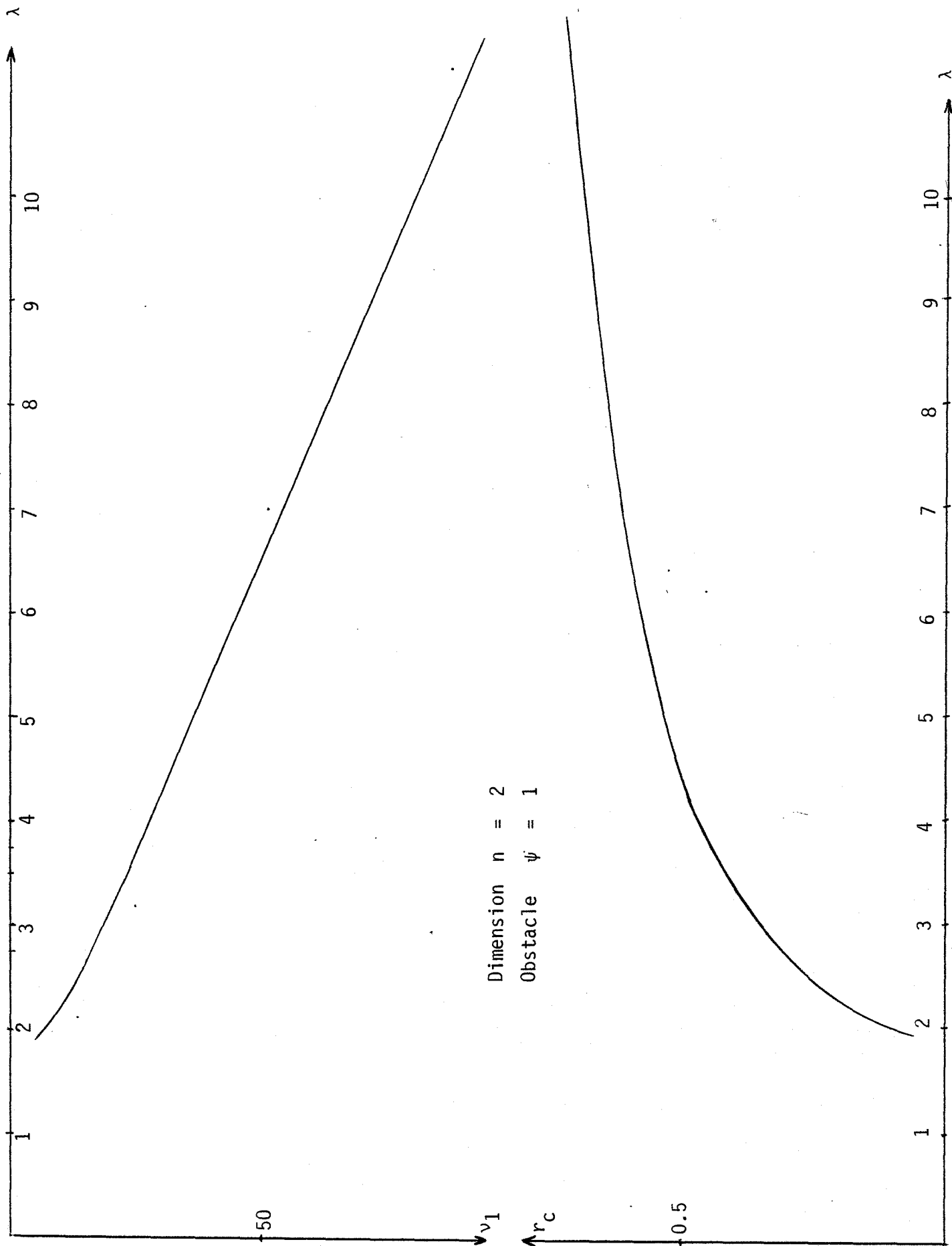
On peut schématiser ces résultats de la manière suivante :

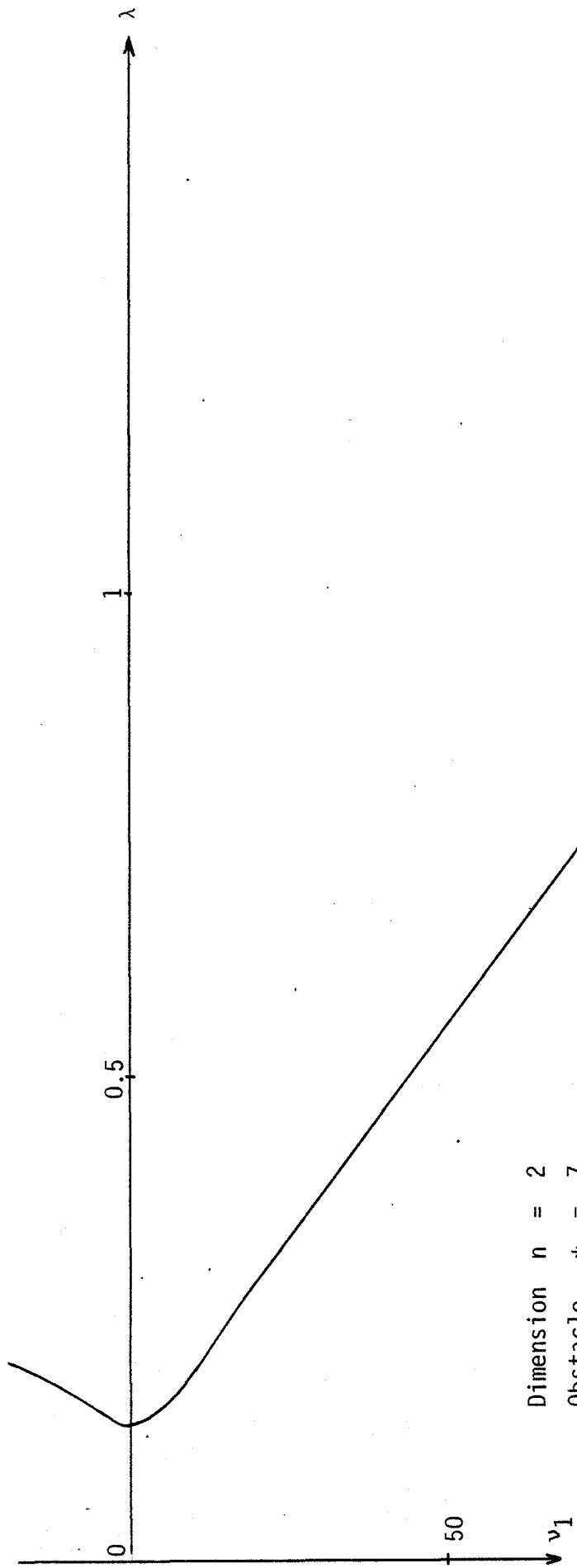


On voit que v_1 change de signe au passage de certains points de retournement dans cet exemple. (S) peut donc être interprétée ici comme une condition de stabilité.

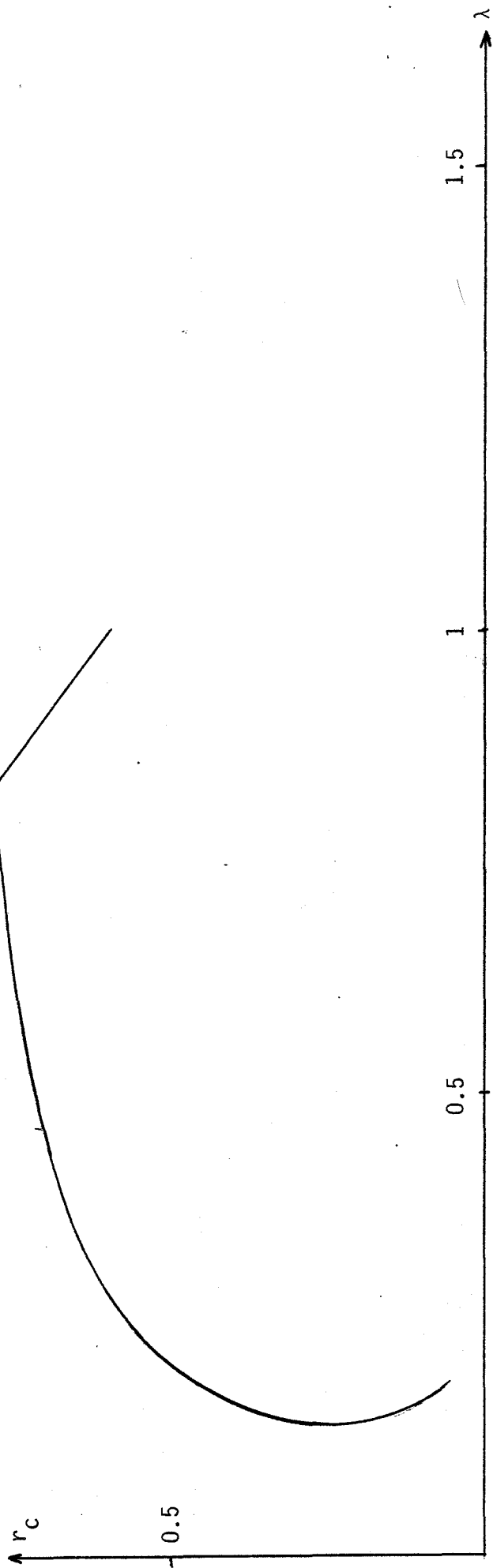


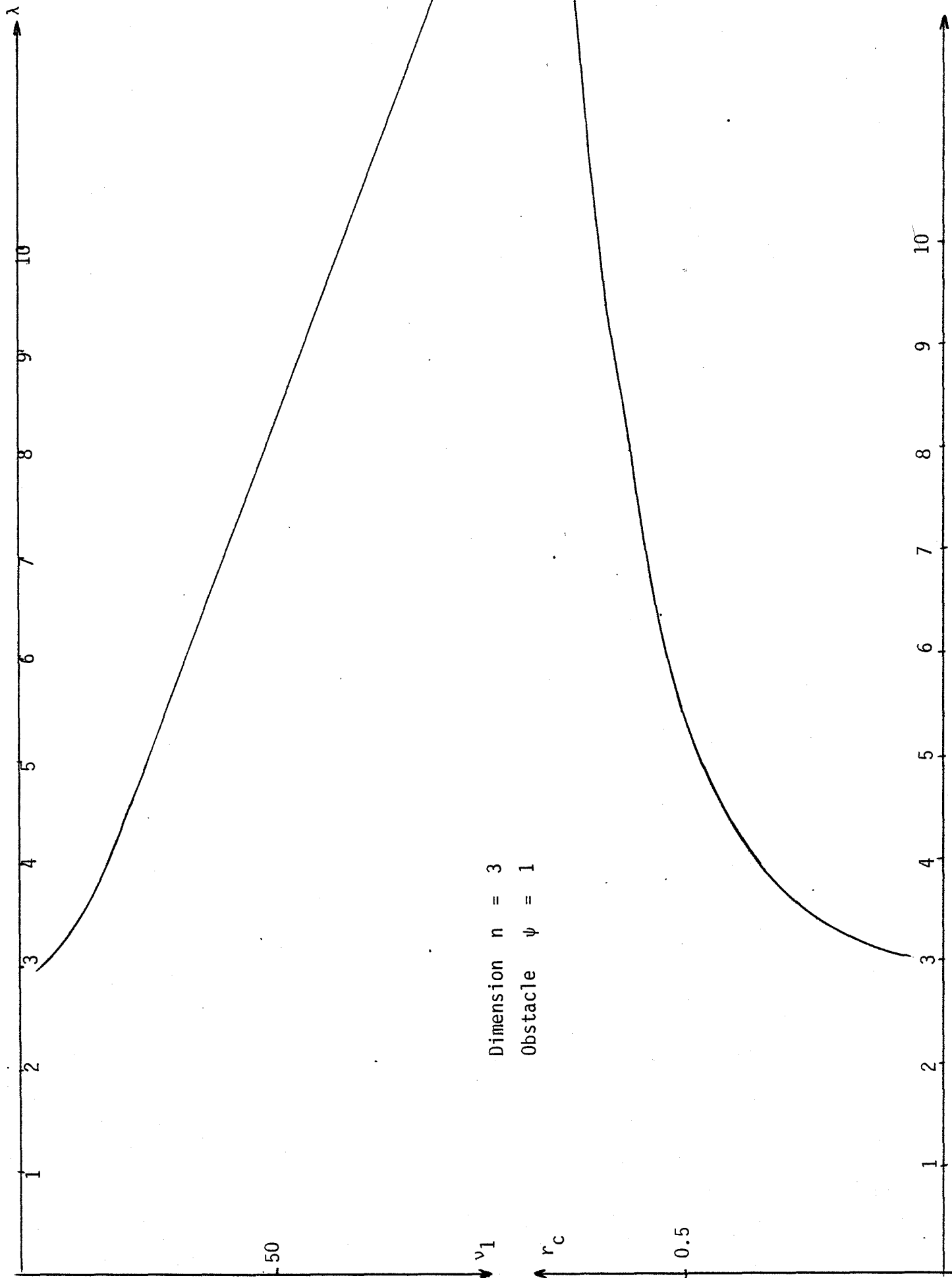


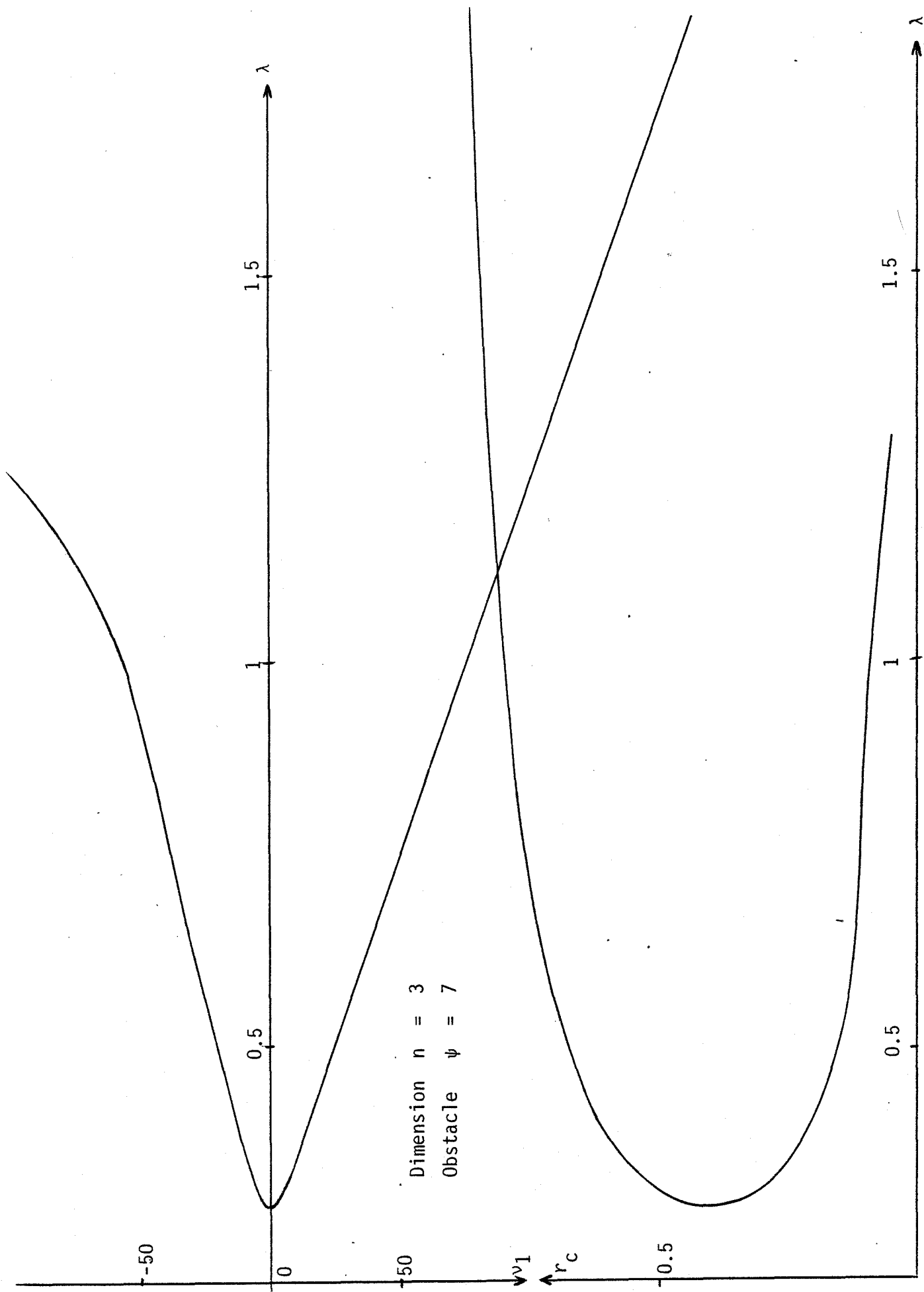




Dimension $n = 2$
Obstacle $\psi = 7$







ETUDE LOCALE DES BRANCHES DE SOLUTIONS
DANS UN PROBLEME D'OBSTACLE

TROISIEME PARTIE

UNE APPROCHE PAR LE DEGRE TOPOLOGIQUE

(AVEC B. NICOLAENKO) (*)

Résumé : On reprend le problème de valeurs propres non linéaires, relatif à une inéquation variationnelle (I.V.), associée à un problème d'obstacle. Après avoir introduit dans la première partie les outils pour une étude locale des branches et donné dans la deuxième partie des résultats locaux par point fixe, on attaque ici ce problème au moyen de la théorie du degré topologique. Par application de résultats abstraits de [73], on démontre l'existence de composantes connexes de solutions, qu'on précise un peu. Les hypothèses sont essentiellement les mêmes que dans la deuxième partie et on examinera successivement le cas de (certains) points réguliers, en particulier de certains points de transition, puis le cas de points singuliers, dans le cadre "linéaire" (cf. deuxième partie).

(*) Travail réalisé lors d'un séjour au Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New-Mexico, 87545 .

I. INTRODUCTION

Les notations sont celles de la deuxième partie.

On considère le problème d'obstacle suivant, avec $\lambda \geq 0$:

$$(I.1) \quad \begin{cases} a(u, v-u) \geq \lambda(F(u), v-u) \\ u \in K ; \forall v \in K \end{cases}$$

avec $K = \{ w \in H_0^1(\Omega) / w \leq \psi \text{ p.p. sur } \Omega \}$;

$\psi \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ est > 0 sur Ω , quasi-continue [3] ;

a est la forme bilinéaire continue, coercive, symétrique sur $H_0^1(\Omega)$:

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx$$

les a_{ij} étant réguliers et $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$.

$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ est positive, croissante, régulière et $F(0) \neq 0$.

On désigne par G l'opérateur de Green associé à a :

$a(Gu, v) = (u, v) \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$, et par P_K la a -projection sur le convexe fermé K [66]. Avec ces notations le problème (I.1) équivaut à :

$$(I.2) \quad u = P_K[\lambda G F(u)]$$

Si (λ_0, u_0) est une solution de (I.1) on pose

$\bar{K}_{u_0} = \{ w \in H_0^1(\Omega) / w \leq 0 \text{ q.p. sur } \{u_0 = \psi\} \}$ pour des représentants u_0, w , choisis quasi-continus ; \bar{K}_{u_0} est l'adhérence dans $H_0^1(\Omega)$ fort du cône des déplacements admissibles dans K à partir de u_0 .

Soit $\{u_0 - \lambda_0 G F(u_0)\}^\perp = \{w \in H_0^1(\Omega) / a(u_0, w) = \lambda_0(F(u_0), w)\}$

on pose : $S_{u_0} = \bar{K}_{u_0} \cap \{u_0 - \lambda_0 G F(u_0)\}^\perp$.

(*) pour simplifier ; on peut évidemment prendre pour F un opérateur de Nemytskii associé à une fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, vérifiant les hypothèses introduites dans la deuxième partie.

On supposera aussi que F a été modifiée hors de $[0, |\psi|_\infty]$ pour que F, F', F'' soient bornées sur \mathbb{R} .

II. EXISTENCE DE BRANCHES EN CERTAINS POINTS REGULIERS

On suppose dans toute la suite que $n \leq 4$.

Soit (u_0, λ_0) une solution, pour le moment quelconque, de (I.1).

On pose $u = u_0 + sz$, $\lambda = \lambda_0 + s$ avec $s \in \mathbb{R}$, $z \in H_0^1(\Omega)$ et

$$\mathcal{A}(s, z) = u - P_K[\lambda GF(u)] = u_0 + sz - P_K[(\lambda_0 + s) GF(u_0 + sz)]$$

On veut résoudre :

$$(II.1) \quad \mathcal{A}(s, z) = 0 \text{ sachant que } \mathcal{A}(0, z)$$

$$= u_0 - P_K[\lambda_0 GF(u_0)] = 0$$

Donc (II.1) équivaut, pour $s \neq 0$ à

$$(II.2) \quad \frac{1}{s} [\mathcal{A}(s, z) - \mathcal{A}(0, z)] = 0$$

Lemme II.1 : $s \in \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}(s, z) \in H_0^1(\Omega)$ est dérivable à droite en $s = 0$ et :

$$\frac{d^+}{ds} [\mathcal{A}(s, z)]_{s=0} = z - P_{s_{u_0}} [\lambda_0 GF'(u_0)z + GF(u_0)]$$

Preuve : Pour $n \leq 4$, l'application $s \in \mathbb{R} \rightarrow F(u_0 + sz) \in L^2(\Omega)$ est dérivable. Il suffit alors d'appliquer le résultat de dérivation composée de [49]. Sous une forme similaire, ce résultat est donné aussi dans l'introduction de la deuxième partie. Rappelons aussi [66] que cette différentiation à droite est uniforme lorsque z reste dans un borné de $H_0^1(\Omega)$, et qu'on a bien évidemment un résultat analogue à gauche. \square

Avec les notations du lemme, (II.1) \Leftrightarrow (II.2) \Leftrightarrow (pour $s \neq 0$)

$$\frac{1}{s} [\mathcal{A}(s, z) - \mathcal{A}(0, z)] - \frac{d^+}{ds} \mathcal{A}(s, z)_{s=0} = - \frac{d^+}{ds} \mathcal{A}(s, z)_{s=0} \text{ i.e}$$

$$(II.3) \quad \frac{1}{s} [u_0 + sz - P_K[(\lambda_0 + s) GF(u_0 + sz)] - u_0 + P_K[\lambda_0 GF(u_0)]]$$

$$= -z + P_{s_{u_0}} [\lambda_0 GF'(u_0)z + GF(u_0)] = -z + P_{s_{u_0}} [\lambda_0 GF'(u_0)z + GF(u_0)] \Leftrightarrow$$

$$(II.3) \quad \begin{cases} \frac{P_K [(\lambda_0 + s) GF(u_0 + sz)] - P_K [\lambda_0 GF(u_0)]}{s} - P_{S_{u_0}} [\lambda_0 GF'(u_0)z + GF(u_0)] \\ = z - P_{S_{u_0}} [\lambda_0 GF'(u_0)z + GF(u_0)] \end{cases}$$

Rappelons le résultat suivant, démontré dans la deuxième partie :

Lemme II.2 : On suppose (dans tout ce §II) que, en (u_0, λ_0) solution de (I.1) la condition suivante est satisfaite (avec $F'(u_0) > 0$) :

$$(S) \inf \left\{ \frac{a(w, w)}{(F'(u_0)w, w)} \mid w \in S_{u_0} - S_{u_0}, w \neq 0 \right\} > \lambda_0 \quad (*)$$

Alors l'opérateur $z \rightarrow z - P_{S_{u_0}} [\lambda_0 GF'(u_0)z + h]$ de $H_0^1(\Omega)$ dans lui-même est inversible pour tout $h \in H_0^1(\Omega)$ et son inverse est lipschitzien.

Notons alors T l'inverse de l'opérateur $z \rightarrow z - P_{S_{u_0}} [\lambda_0 GF'(u_0)z + GF(u_0)]$; en appliquant T aux deux membres de (II.3) on obtient la formulation équivalente :

$$(II.4) \quad z = T \left[\frac{P_K [(\lambda_0 + s) GF(u_0 + sz)] - P_K [\lambda_0 GF(u_0)]}{s} - P_{S_{u_0}} [\lambda_0 GF'(u_0)z + GF(u_0)] \right]$$

Pour $s = 0$, le terme de droite de (II.4) vaut, d'après le lemme (II.1), $T(0) = z_+$ qui est par définition la solution unique (cf. deuxième partie) de :

$z_+ = P_{S_{u_0}} [\lambda_0 GF'(u_0) z_+ + GF(u_0)]$: c'est la direction conique à droite en (u_0, λ_0)

On va poser par conséquent $z = z_+ + \phi$ avec $\phi \in H_0^1(\Omega)$ et (II.4) pour $s \neq 0$ est équivalent à

(*) Ou encore $\inf \{ a(w, w) - \lambda_0 (F'(u_0)w, w) \mid w \in S_{u_0} - S_{u_0}, ||w|| = 1 \} > 0$.

$$(II.5) \quad \phi = T \left[\frac{P_K [(\lambda_0 + s)GF(u_0 + sz_+ + s\phi) - P_K [\lambda_0 GF(u_0)]] - P_{s u_0} [\lambda_0 GF'(u_0)(z_+ + \phi) + GF(u_0)]}{s} \right] - T(0)$$

On définit enfin :

$$\phi(s, \phi) = \begin{cases} \text{second membre de (II.5) pour } s > 0 \\ 0 \text{ pour } s = 0 \end{cases}$$

donc pour $u = u_0 + sz_+ + s\phi$, $\lambda = \lambda_0 + s$, (I.1) équivaut à (II.5) :
 $\phi = \phi(s, \phi)$

Lemme II.3 : Sous l'hypothèse (S) du lemme (II.2), l'opérateur non linéaire $\phi : \mathbb{R}_+ \times H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ est compact.

Preuve : soit une famille (s, ϕ) dans un borné de $\mathbb{R}_+ \times H_0^1(\Omega)$.
 Après éventuellement une extraction on a $s_n \rightarrow s$ dans \mathbb{R}_+ , $\phi_n \rightarrow \phi$ dans $L^2(\Omega)$ fort d'où en particulier $s_n z_+ + s_n \phi_n \rightarrow sz_+ + s\phi$ dans $L^2(\Omega)$ fort et $F(u_0 + s_n z_+ + s_n \phi_n) \rightarrow F(u_0 + sz_+ + s\phi)$ car $t \rightarrow F(t)$ étant régulière et bornée définit un opérateur de Nemytskii continu de $L^2(\Omega)$ fort dans lui-même.

De même $F'(u_0) \phi_n \rightarrow F'(u_0) \phi$ dans $L^2(\Omega)$ car $F'(u_0) \in L^\infty(\Omega)$.
 En composant avec l'opérateur G , les convergences ont lieu dans $H_0^1(\Omega)$ et comme P_K , $P_{s u_0}$ et T sont continus, on obtient, pour $s \neq 0$, la convergence de $\phi(s_n, \phi_n)$ vers $\phi(s, \phi)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Lorsque $s_n \rightarrow s = 0$, on utilise le fait, déjà noté dans la preuve du lemme (II.1), que la différentiation conique du projecteur P_K est uniforme pour toute direction $\lambda_0 GF'(u_0)z_+ + \lambda_0 GF'(u_0)\phi_n + GF(u_0)$ lorsque ϕ_n reste dans un borné de $H_0^1(\Omega)$ (la direction restant, grâce à la régularité de G , dans un compact de $H_0^1(\Omega)$). On obtient dans ce cas $\phi(s_n, \phi_n) \rightarrow 0 = \phi(0, \phi)$ ce qui prouve que $\phi(s, \phi)$ est relativement compact pour (s, ϕ) dans un borné.

Pour la continuité, on part directement d'une suite (s_n, ϕ_n) convergente dans $\mathbb{R}_+ \times H_0^1(\Omega)$, donc dans $L^2(\Omega)$ et on raisonne exactement de la même manière. \square

Lemme II.4 : Ou bien on a localement à droite ($s > 0$) une branche affine de solutions de (I.1) passant par (u_0, λ_0) , ou bien, dans tout intervalle $[0, s^*]$ il existe $s > 0$ tel que $\phi(s, 0) \neq 0$.

Preuve : Supposons qu'il existe $s^* > 0$ tel que :

$$\phi(s, 0) \equiv 0 \quad \forall s \in [0, s^*]$$

Alors, pour $s \neq 0$, d'après (II.5) :

$$T(0) = T \left[\frac{P_K [(\lambda_0 + s) GF(u_0 + sz_+)] - P_K [\lambda_0 GF(u_0)]}{s} - P_{s_{u_0}} [(\lambda_0 GF'(u_0) z_+ + GF(u_0))] \right]$$

d'où en appliquant T^{-1} et la définition de z_+ :

$$0 = \frac{P_K [(\lambda_0 + s) GF(u_0 + sz_+)] - u_0}{s} - z_+ \quad \rightarrow$$

$u_0 + sz_+ = P_K [(\lambda_0 + s) GF(u_0 + sz_+)]$ donc on a, pour $0 \leq s \leq s^*$ une branche de solutions de la forme : $\lambda = \lambda_0 + s$; $u = u_0 + sz_+$ \square

Remarque : On peut effectivement se trouver en présence d'une branche affine comme le montre l'exemple suivant :

$$\Omega =]-1, 1[, \quad A = -\Delta , \quad F(t) \equiv 1 , \quad \psi(x) = 1 + |x|$$

Pour $\lambda \leq 2$ la solution est $u(x) = \frac{\lambda}{2} (1 - x^2)$.

Tout point (u_0, λ_0) de la branche équation ($\lambda < 2$) vérifie la condition de stabilité et est le point de départ d'une branche affine, à savoir

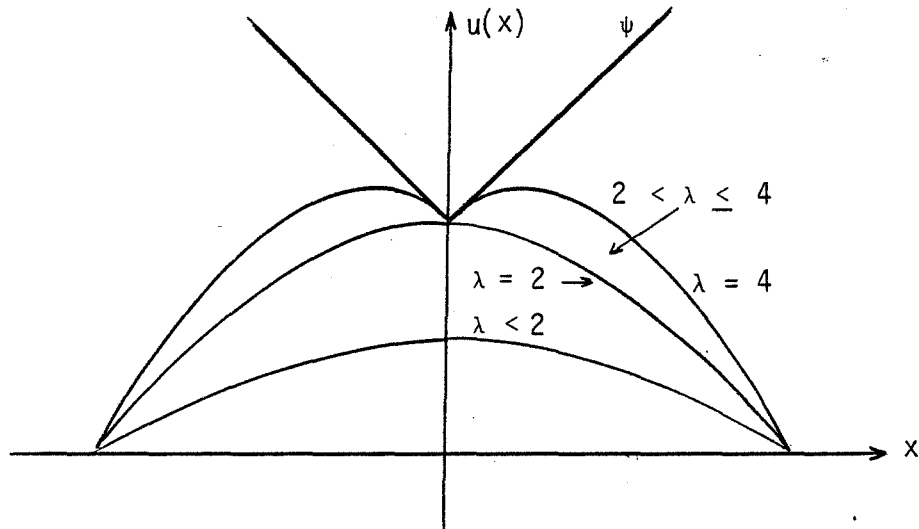
$$u = u_0 + \frac{s}{2} (1 - x^2) \quad \text{avec} \quad u_0 = \frac{\lambda_0}{2} (1 - x^2) , \quad \lambda_0 + s \leq 2 !$$

On peut donner un exemple moins trivial en prenant le point de transition $\lambda_0 = 2$, $u_0(x) = 1 - x^2$; pour $2 \leq \lambda \leq 4$ la solution de l'I.V. est :

$$u(x) = -\frac{\lambda}{2} x^2 + \left(\frac{\lambda}{2} - 1\right)x + 1 \quad \text{pour } 0 < x < 1$$

$$= 1 - x^2 + s(x - x^2) = u_0 + sz_+ \quad \text{avec } \lambda = 2 + s \leq 4$$

qui est une branche localement affine issue de (λ_0, u_0) .



Pour $2 < \lambda < 4$ l'ensemble de coïncidence est $\{0\}$ et on a une branche localement affine en toute solution (u, λ) avec $2 < \lambda < 4$.

Revenons à l'équation $\phi = \phi(s, \phi)$. On a $\phi(0, \phi) \equiv 0$ et en particulier $(0, 0)$ est solution de (II.5).

Lemme II.5 : On se place dans le cas où il n'y a pas de branche localement affine passant par (u_0, λ_0) .

Alors $\forall \epsilon > 0, \forall \eta > 0$ il existe $(s, \phi) \in (I_\epsilon \times B_\eta) \cap \mathcal{F}$ où
 $I_\epsilon \times B_\eta = \{(s, \phi) \in \mathbb{R}_+ \times H_0^1(\Omega) / 0 \leq s \leq \epsilon; \|\phi\| \leq \eta\}$ et
 $\mathcal{F} = \{(s, \phi) \in \mathbb{R}_+ \times H_0^1(\Omega) / \phi = \phi(s, \phi), s \neq 0, \phi \neq 0\}$

Preuve : On raisonne par l'absurde. Si la proposition était fausse, $\exists \epsilon_0 > 0, \eta_0 > 0$ tels que $\nexists (s, \phi) \in I_{\epsilon_0} \times B_{\eta_0} \cap \mathcal{F}$. En particulier, toute solution $(s, \phi) \in I_{\epsilon_0} \times B_{\eta_0}$ avec $s \neq 0$ est nécessairement de la forme $(s \neq 0, \phi = 0)$.

Donc si $s \in]0, \frac{\varepsilon_0}{2}]$, il n'existe pas de ϕ sur la sphère $\partial B_{n_0/2}$ tel que $\phi - \phi(s, \phi) = 0$. Le degré, $\deg(I - \phi(s, \cdot), B_{n_0/2}, 0)$ est ainsi parfaitement défini pour tout $s \in [0, \frac{\varepsilon_0}{2}]$ et est invariant par homotopie.

Soit $s_1 \in]0, \frac{\varepsilon_0}{2}]$ tel que $\phi(s_1, 0) \neq 0$ (cf. lemme II.4)

Alors $\phi - \phi(s_1, \phi) \neq 0 \ \forall \phi \in B_{n_0/2}$, d'après l'hypothèse d'absurdité.

Donc $\deg(I - \phi(s, \cdot), B_{n_0/2}, 0) =$

$$\deg(I - \phi(s_1, \cdot), B_{n_0/2}, 0) = 0$$

Mais on a aussi $\deg(I - \phi(s, \cdot), B_{n_0/2}, 0) =$

$$\deg(I - \phi(0, \cdot), B_{n_0/2}, 0) = \deg(I, B_{n_0/2}, 0) = 1$$

d'où une contradiction. \square

Remarque : Le lemme II.5 implique, dans le cas non localement affine, que $(0,0)$ est point d'accumulation d'une suite (s_i, ϕ_i) telle que $s_i > 0$, $\phi_i \neq 0$, et $\phi_i = \phi(s_i, \phi_i)$.

Proposition II.1 : Si la condition (S) est satisfaite, il existe une composante connexe C^+ de solutions (u, λ) de (I.1) contenant (u_0, λ_0) , pour $\lambda \geq \lambda_0$, non bornée dans $\mathbb{R}_+ \times H_0^1(\Omega)$ telle que :

si $(\lambda_i, u_i) \in C^+$ vérifie $\lambda_i \rightarrow \lambda_0$, alors

$$\frac{u_i - u_0}{\lambda_i - \lambda_0} \rightarrow z_+ \text{ où } z_+ \text{ est l'unique solution de :}$$

$$\begin{cases} a(z_+, h - z_+) \geq \lambda_0 (F'(u_0)z_+, h - z_+) + (F(u_0), h - z_+) \\ \forall h \in S_{u_0} ; z_+ \in S_{u_0} \end{cases}$$

Ce résultat justifie entre autres l'introduction des points réguliers et des directions coniques qui avait été faite dans la première partie.

On notera que z_+ est obtenu ici comme limite forte de $\frac{u_i - u_0}{\lambda_i - \lambda_0}$ dans $H_0^1(\Omega)$ et non pas seulement faible comme dans la première partie.

Preuve de la proposition II.1 : D'après le lemme II.5 la composante de solutions de (II.5) contenant $(0,0)$ est non vide. On sait alors, ϕ étant compact continu, qu'elle est automatiquement non bornée dans $\mathbb{R}_+ \times H_0^1(\Omega)$ [73]. Si $s_i \rightarrow 0_+$, on a $\phi_i \rightarrow 0$ donc $\frac{u_i - u_0}{\lambda_i - \lambda_0} = \phi_i + z_+ \rightarrow z_+$ \square

Remarque 1 : Sous la condition (S) on a évidemment aussi existence d'une composante C^- de solutions (u, λ) de (I.1) contenant (u_0, λ_0) , pour $\lambda \leq \lambda_0$, non bornée dans $\mathbb{R}_- \times H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$\text{si } (\lambda_i, u_i) \in C^- \text{ vérifie } \lambda_i \rightarrow \lambda_0 \text{ alors } \frac{u_i - u_0}{\lambda_i - \lambda_0} \rightarrow z_- \text{ où}$$

z_- est l'unique solution de

$$\begin{cases} a(z_-, h - z_-) \geq \lambda_0 (F'(u_0)z_-, h - z_-) + (F(u_0), h - z_-) \\ \forall h \in -S_{u_0} ; z_- \in -S_{u_0} \end{cases}$$

Remarque 2 : Lorsque S_{u_0} est un espace vectoriel, la condition (S) peut être relaxée. Il suffit que (u_0, λ_0) soit un point régulier. On obtient dans ce cas deux composantes C^-, C^+ se rencontrant en (u_0, λ_0) , et $z_- = z_+$.

III. COMPORTEMENT EN CERTAINS POINTS SINGULIERS

Soit (λ_0, u_0) une solution de (I.1), singulière (cf. première partie). On suppose que S_{u_0} est un espace vectoriel (cf. deuxième partie pour des conditions assurant la linéarité de S_{u_0}) et que le noyau \mathcal{N} de $I - P_{S_{u_0}} [\lambda_0 G F'(u_0).]$ est de dimension 1.

Lemme III.1 : $\mathcal{R} = I_m [I - P_{S_{u_0}} [\lambda_0 G F'(u_0).]]$ est fermé, de codimension 1 et en fait, avec $\mathcal{N} = \mathbb{R} z_N$, z_N fixé dans \mathcal{N} :

$$\mathcal{R} = \{w \in H_0^1(\Omega) / (F'(u_0)z_N, w) = 0\}$$

Preuve : cf. deuxième partie \square

On suppose en outre vérifiée la condition de transversalité :

(G) $P_{s_{u_0}} [GF(u_0)] \notin \mathcal{R}$ ce qui se traduit de la façon suivante:

$$a(GF'(u_0)z_N, P_{s_{u_0}} [GF(u_0)]) = (F'(u_0)z_N, P_{s_{u_0}} [GF(u_0)]) = \left(\frac{F(u_0), z_N}{\lambda_0} \right) \neq 0$$

(cf. preuve du lemme III.1 dans la deuxième partie).

Soit \mathcal{W} un supplémentaire (orthogonal pour le produit scalaire $a(.,.)$ pour fixer les idées) de \mathcal{N} dans $H_0^1(\Omega)$.

On pose :

$$\begin{cases} u = u_0 + s(z_N + w), & z_N \in \mathcal{N}, w \in \mathcal{W} \\ \lambda = \lambda_0 + s\delta; & \delta \in \mathbb{R}, s \geq 0 \end{cases}$$

Avec ces notations on veut résoudre (I.1) sous la forme :

$$(III.1) \quad \mathcal{A}(s, \delta, w) = u_0 + s(z_N + w) - P_K[(\lambda_0 + s\delta)GF(u_0 + sz_N + sw)] = 0$$

ou encore :

$$(III.1) \quad \mathcal{A}(s, \delta, w) = s(z_N + w) - P_K[(\lambda_0 + s\delta)GF(u_0 + sz_N + sw)] + P_K[\lambda_0 GF(u_0)] = 0$$

Lemme III.2 :

$$\lim_{s \rightarrow 0+} \frac{P_K[(\lambda_0 + s\delta)GF(u_0 + sz_N + sw)] - P_K[\lambda_0 GF(u_0)]}{s}$$

$$= \delta P_{s_{u_0}} [GF(u_0)] + \lambda_0 P_{s_{u_0}} [GF'(u_0)(z_N + w)] \quad \text{et}$$

$$\frac{d^+}{ds} \mathcal{A}(s, \delta, w)_{s=0} = z_N + w - \lambda_0 P_{s_{u_0}} [GF'(u_0)(z_N + w)] - \delta P_{s_{u_0}} [GF(u_0)]$$

Preuve : Pour la première formule, on utilise encore la composition des dérivées [49] comme dans le lemme II.1, ou bien les préliminaires de la deuxième partie avec, en plus, dans ce cas, la linéarité de $P_{s u_0}$. La deuxième formule s'en déduit immédiatement \square

Pour $s > 0$, (III.1) est alors équivalent à :

$$\begin{aligned}
 \text{(III.2)} \quad & -\frac{1}{s} \mathcal{A}(s, \delta w) + \frac{d^+}{ds} [\mathcal{A}(s, \delta, w)]_{s=0} = + \frac{d^+}{ds} [\mathcal{A}(s, \delta, w)]_{s=0} \Leftrightarrow \\
 & z_N + w - \lambda_0 P_{s u_0} [GF'(u_0)(z_N + w)] - \delta P_{s u_0} [GF(u_0)] \\
 & = \frac{1}{s} \left[P_K [(\lambda_0 + s\delta) GF(u_0 + sz_N + sw)] - P_K [\lambda_0 GF(u_0)] \right] \\
 & - \lambda_0 P_{s u_0} [GF'(u_0)(z_N + w)] - \delta P_{s u_0} [GF(u_0)]
 \end{aligned}$$

et en utilisant le fait que $z_N \in \mathcal{N}$, (III.2) \Leftrightarrow

$$\text{(III.3)} \quad \left\{ \begin{aligned} & w - \lambda_0 P_{s u_0} [GF'(u_0)w] - \delta P_{s u_0} [GF(u_0)] = \\ & \frac{1}{s} \left[P_K [(\lambda_0 + s\delta) GF(u_0 + sz_N + sw)] - P_K [\lambda_0 GF(u_0)] \right] \\ & - \lambda_0 P_{s u_0} [GF'(u_0)(z_N + w)] - \delta P_{s u_0} [GF(u_0)] \end{aligned} \right.$$

Lemme III.3 : L'opérateur $(\delta, w) \in \mathbb{R} \times \mathcal{W} \rightarrow w - \lambda_0 P_{s u_0} [GF'(u_0)w] - \delta P_{s u_0} [GF(u_0)] \in H_0^1(\Omega)$ admet un inverse continu.

Preuve : Soit à résoudre $w - \lambda_0 P_{s u_0} [GF'(u_0)w] - \delta P_{s u_0} [GF(u_0)] = f$;

on doit avoir $\delta P_{S_{u_0}} [GF(u_0)] + f \in \mathcal{R}$ donc

$$\begin{aligned} (F'(u_0)z_N, \delta P_{S_{u_0}} [GF(u_0)] + f) &= \delta (F'(u_0)z_N, P_{S_{u_0}} [GF(u_0)]) \\ + (F'(u_0)z_N, f) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \delta = -\lambda_0 \frac{(F'(u_0)z_N, f)}{(F(u_0), z_N)} \end{aligned}$$

qui est défini grâce à la condition de transversalité (G). On a projeté en fait l'équation sur $F'(u_0)z_N$ i.e l'orthogonal de \mathcal{R} .

Ensuite, en projetant l'équation sur \mathcal{R} on obtient :

$$w - \lambda_0 P_{S_{u_0}} [GF'(u_0)w] = f + \delta P_{S_{u_0}} [GF(u_0)].$$

Il existe, par le pseudo-inverse $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{W}$ une unique solution w à cette équation, dépendant continûment du second membre. \square

Soit T l'inverse défini par le lemme III.3. En appliquant T aux deux membres de (III.3) on a la formulation équivalente à (III.1)

$$\begin{aligned} \text{(III.4)} \quad (\delta, w) &= T \left[\frac{1}{s} (P_K[(\lambda_0 + s\delta) GF(u_0 + sz_N + sw)] - P_K[\lambda_0 GF(u_0)]) \right. \\ &\quad \left. - \lambda_0 P_{S_{u_0}} [GF'(u_0)(z_N + w)] - \delta P_{S_{u_0}} [GF(u_0)] \right] \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\text{(III.4)} \quad (\delta, w) = \Phi(s, \delta, w)$$

où on a posé :

$$\Phi(s, \delta, w) = \begin{cases} \text{second membre de (III.4) si } s > 0 \\ 0 \text{ pour } s = 0 \quad (\lim_{s \rightarrow 0^+} \Phi(s, \delta, w) = T(0) = 0) \end{cases}$$

On est donc ramené à chercher les solutions de $I - \Phi(s, \dots)$ ou I est l'identité de $\mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$ dans lui-même.

Lemme III.4 : $\phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$ est une application non linéaire compacte.

Preuve : Exactement semblable à celle du lemme (II.3) en prenant $(s_n, \delta_n, w_n) \rightarrow (s, \delta, w)$ avec $s \neq 0$ ou $s = 0$ \square

Lemme III.5 : Ou bien (I.1) admet une branche de solutions localement verticale pour $s \in [0, s^*]$ (i.e $\lambda = \lambda_0$) ou bien, dans tout intervalle $[0, s^*]$ il existe $s > 0$ tel que $\phi(s, 0, 0) \neq 0$.

Preuve : si $\phi(s, 0, 0) \equiv 0$ sur $[0, s^*]$, alors $(0, 0) = \phi(s, 0, 0) \Rightarrow$ d'après (III.4) :

$$z_N = \frac{1}{s} \left[P_K [\lambda_0 \quad GF(u_0 + sz_N)] - u_0 \right] \rightarrow$$

$$u_0 + sz_N = P_K [\lambda_0 \quad GF(u_0 + sz_N)]$$

donc on a une branche de solutions de la forme :

$$\lambda = \lambda_0 ; \quad u = u_0 + sz_N \quad \text{avec} \quad 0 \leq s \leq s^* \quad \square$$

Remarque : On ne sait pas si la situation de branche verticale est effectivement possible.

Revenons à l'équation (III.4) : $(\delta, w) = \phi(s, \delta, w)$.

Par construction, $\phi(0, \delta, w) = 0$ et en particulier $(0, 0, 0)$ est une solution de (III.4).

Lemme III.6 : On se place dans le cas où il n'y a pas de branche localement verticale passant par (u_0, λ_0) . Alors $\forall \epsilon > 0$, $\forall \gamma > 0$, $\forall \eta > 0$ il existe $(s, \delta, w) \in I_\epsilon^+ \times J_\gamma \times B_\eta \cap \mathcal{G}$ où

$$I_\epsilon^+ \times J_\gamma \times B_\eta = \{ s, \delta, w / 0 \leq s \leq \epsilon ; -\gamma \leq \delta \leq \gamma ; \|w\| \leq \eta \}$$

$$\text{et } \mathcal{G} = \{ s, \delta, w / (\delta, w) = \phi(s, \delta, w) \text{ avec } s \neq 0 \text{ et } (\delta, w) \neq (0, 0) \}$$

Preuve : Supposant la proposition fausse, on aurait :

$$\exists \epsilon_0 > 0, \exists \gamma_0 > 0, \exists \eta_0 > 0 \text{ tels que } \nexists (s, \delta, w) \in I_{\epsilon_0}^+ \times J_{\gamma_0} \times B_{\eta_0} \cap \mathcal{G}.$$

En particulier, toute solution $(s, \delta, w) \in I_{\epsilon_0}^+ \times J_{\gamma_0} \times B_{\eta_0}$, $s > 0$ est

nécessairement de la forme $(s \neq 0, \delta = 0, w = 0)$. Alors, pour tout $s \in]0, \epsilon_0/2]$ il n'existe pas de $(\delta, w) \in \partial(J_{\gamma_0/2} \times B_{\eta_0/2})$ tel que $(\delta, w) = \phi(s, \delta, w)$ car sinon on aurait $\delta = 0, w = 0$!

Donc le degré $\deg(I - \phi(s, \dots), B_{\eta_0/2} \times J_{\gamma_0/2}, 0)$ est défini $\forall s \in]0, \epsilon_0/2]$ et est invariant par homotopie.

Soit s_1 tel que $\phi(s_1, 0, 0) \neq 0$ (cf. lemme III.5).

Alors $(\delta, w) = \phi(s_1, \delta, w) \neq 0 \quad \forall (\delta, w) \in J_{\gamma_0/2} \times B_{\eta_0/2}$ sinon on aurait de nouveau une solution du type $s_1 \neq 0, (\delta, w) \neq (0, 0)$ avec $(s_1, \delta, w) \in I_{\epsilon_0/2}^+ \times J_{\gamma_0/2} \times B_{\eta_0/2}$

$$\text{Donc } \deg(I - \phi(s, \dots), J_{\gamma_0/2} \times B_{\eta_0/2}, 0) =$$

$$\deg(I - \phi(s_1, \dots), J_{\gamma_0/2} \times B_{\eta_0/2}, 0) = 0$$

$$\text{Mais on a aussi } \deg(I - \phi(s, \dots), J_{\gamma_0/2} \times B_{\eta_0/2}, 0) =$$

$$= \deg(I - \phi(0, \dots), J_{\gamma_0/2} \times B_{\eta_0/2}, 0) = 1$$

d'où la contradiction. \square

Remarque 1 : On a évidemment un résultat analogue en remplaçant I_{ϵ}^+ par $I_{\epsilon}^- = \{s / -\epsilon \leq s \leq 0\}$

Remarque 2 : Le lemme III.6 implique alors que $(0, 0, 0)$ est point d'accumulation d'une suite

(s_i, δ_i, w_i) telle que $s_i > 0, (\delta_i, w_i) \neq (0, 0)$ et $(\delta_i, w_i) = \phi(s_i, \delta_i, w_i)$ (avec un résultat analogue pour $s_i < 0$).

Proposition III.1 : Soit (u_0, λ_0) une solution de (I.1) telle que (u_0, λ_0) soit singulier, S_{u_0} un espace vectoriel et

$$\dim \mathcal{N}[I - \lambda_0 P_{S_{u_0}} G F'(u_0)] = 1,$$

avec la condition de transversalité (6). Alors il existe deux composantes connexes de solutions de (I.1) issues de (u_0, λ_0) , C^+ et C^- , non bornées dans $\mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$, telles que $C^+ \cap C^- = (u_0, \lambda_0)$, de la forme :

$$\lambda = \lambda_0 + s\delta, \quad s > 0 \text{ sur } C^+, \quad s < 0 \text{ sur } C^-$$

$$u = u_0 + sz_N + sw \quad \text{avec } z_N \in \mathcal{N}, \quad a(w, z_N) = 0$$

$$\text{et } (\delta_i, w_i) \rightarrow (0, 0) \text{ lorsque } s_i \rightarrow 0$$

Preuve : Identique à la proposition II.1 \square

BIBLIOGRAPHIE

- 1- AGMON S., DOUGLIS A., NIRENBERG L., Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, Comm. Pure. Appl. Math. 12, 1959, p. 623-727.
- 2- AMANN H., Existence of multiple solutions for nonlinear elliptic boundary value problems, Ind. Univ. Math. J. 21, 1972, p. 925.
- 3- ANCONA A., Théorie du potentiel dans les espaces fonctionnels à forme coercive, Cours de 3^e cycle, Univ. Paris VI, 1973.
- 4- ARIS R., The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts, Clarendon Press, Oxford, 1975.
- 5- BERESTYCKI H., LIONS P.L., Some applications of the method of super and subsolutions, Lect. Notes in Math N°782, 1980, p. 16-41.
- 6- BERGER M.S., Nonlinearity and functional analysis, Lectures on nonlinear problems in mathematical physics, Acad. Press, 1977.
- 7- BILHOU-BOUGNOL V., Cinétique enzymatique d'une réaction exothermique en phase hétérogène et sous pression, Thèse Doct. Ing., Saint-Etienne, 1976.
- 8- BRAMFORD G.H., TIPPER C.F., Comprehensive chemical kinetics, vol.6, Elsevier Pub. Company, 1972.
- 9- BRAUNER C.M., Perturbations singulières dans des systèmes non linéaires et applications à la biochimie, Thèse Univ. Paris XI, 1975.
- 10- BRAUNER C.M., NICOLAENKO B., Perturbations singulières, solutions multiples et hystérésis dans un problème de biochimie, C.R.A.S., Série A, 283, 1976, p. 775.
- 11- BRAUNER C.M., NICOLAENKO B., Singular perturbations, multiple solutions and hysteresis in a nonlinear problem, Lect. Notes in Math. N°594, 1977, p. 50-76.
- 12- BRAUNER C.M., NICOLAENKO B., Sur une classe de problèmes elliptiques non linéaires, C.R.A.S., Série A, 286, 1978, p.1007-1010.
- 13- BRAUNER C.M., NICOLAENKO B., Sur des problèmes aux valeurs propres non linéaires qui se prolongent en problèmes à frontière libre, C.R.A.S., Série A, 287, 1978, p. 1105-1108.

- 14- BRAUNER C.M., NICOLAENKO B., Sur des problèmes aux valeurs propres qui se prolongent en problèmes à frontière libre, C.R.A.S., Série A, 288, 1979, p. 125.
- 15- BRAUNER C.M., NICOLAENKO B., Internal layers and free boundary problems, Bail 1 Conference, Dublin, 1980, Boundary and Internal layers, ed. Miller J.J.H., Boole Press, Dublin, 1980.
- 16- BRAUNER C.M., NICOLAENKO B., On nonlinear eigenvalue problems which extend into free boundary problems, Lect. Notes in Math. N°782, 1980, p. 61-100.
- 17- BRAUNER C.M., NICOLAENKO B., Homographic approximations of free boundary problems characterized by elliptic variational inequalities, Nonlinear partial differential equations, Proc. Sem. Collège de France 3, 1981.
- 18- BRAUNER C.M., NICOLAENKO B., A general approximation of some free boundary problems by bounded penalization, à paraître dans les Proc. Sem. Collège de France.
- 19- BRAUNER C.M., NICOLAENKO B., Regularization and bounded penalization in free boundary problems, Lect. Notes in Math. N°942, 1982, p. 19-42.
- 20- BREZIS H., Problèmes unilatéraux, Thèse J. Math. Pures et Appliquées 51, 1972, p. 1-168.
- 21- BREZIS H., Intégrales convexes dans les espaces de Sobolev, Isr. J. of Maths 13, 1977, p. 9-27.
- 22- BROWDER F.E., Existence theorems for nonlinear partial differential equations, Proc. Symp. Pure Math. 16, 1970 p. 1-60.
- 23- BROWDER F.E., Nonlinear functional analysis and nonlinear integral equations of Hammerstein and Urysohn type, Contributions in nonlinear functional analysis, ed. E.H. Zarantonello, Acad. Press, 1971, p. 425-500.
- 24- CAFFARELLI L.A., The regularity of free boundaries in higher dimensions, Acta. Math. 139, 1977, p. 155-184.
- 25- CAFFARELLI L.A., A remark on the Hausdorff measure of a free boundary and the convergence of coincidence sets, Boll. Unione Mat. Ital. 18, 1981, p. 1297-1299.
- 26- CAFFARELLI L.A., KINDERLEHRER D., Potential methods in variational inequalities, J. Anal. Math. 37, 1980, p. 285-295.

- 27- CAFFARELLI L.A., RIVIERE N.M., Smoothness and analyticity of the free boundaries in variational inequalities, Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa 3, 4, 1976, p. 289-310.
- 28- CEA J., GEYMONAT G., Une méthode de linéarisation via l'optimisation, Symp. Math., Inst. Naz. di Alta Matematica, X, 1972, p. 431-451.
- 29- CHANG K.C., The obstacle problem and partial differential equations with discontinuous nonlinearities, Comm. Pure. Appl. Math. XXXIII, 1980, p. 117-146.
- 30- CLEMENT P., PELLETIER L.A., Sur les solutions harmoniques de problèmes aux valeurs propres elliptiques, C.R.A.S.
- 31- COHEN D.S., LAETSCH T., Nonlinear boundary value problems suggested by chemical reactor theory, J. Diff. Equations 7, 1980, p. 217-226.
- 32- CONRAD F., TREGUER-SEGUDA V., Parameter estimation in some diffusion and reaction models : an application of bifurcation theory, soumis à Chem. Eng. Sci.
- 33- CONRAD F., The local behaviour of turning points in nonlinear eigenvalue problems, application to parameter identification, à paraître dans Num. Funct. Anal. Opt.
- 34- CONRAD F., Etude locale des branches de solutions dans un problème d'obstacle : I- points réguliers, points singuliers, directions coniques, exemples, Publ. Lyon-Saint-Etienne N°15, Janvier 1983.
- 35- CONRAD F., ISSARD-ROCH F., Etude locale des branches de solutions dans un problème d'obstacle : II- Développements locaux, points de retournement, Publ. Lyon-Saint-Etienne N°18, Avril 1983.
- 36- CONRAD F., ISSARD-ROCH F., Etude locale de branches de solutions dans une classe d'inéquations variationnelles, C.R.A.S., à paraître.
- 37- CRANDALL M.C., RABINOWITZ P.H., Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues and linearized stability, Arch. Rat. Mech. Anal. 59, 1973, p. 161-180.
- 38- CRANDALL M.C., RABINOWITZ P.H., Some continuation and variational methods for positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems, Arch. Rat. Mech. Anal. 58, 1975, p. 241-269.
- 39- DIAZ J.I., HERNANDEZ J., On the existence of a free boundary for a class of reaction-diffusion systems, M.R.C. Technical Report, October 20, 1981.

- 40- DIXON M., WEBB E.C., Enzymes, Longman, London, 1964.
- 41- DUVAUT G., LIONS J.L., Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris, 1972.
- 42- EDWARDS R.E., Functionnal analysis, Holt, Rinehart and Winston, 1963.
- 43- FRADKIN L.J., WAKE G.C., The critical explosion parameter in the theory of thermal ignition, J. Inst. Math. Appl. 20, 1977, p. 471-484.
- 44- FUJITA H., On the nonlinear equations $u + e^u = 0$ and $\frac{v}{t} = v + e^v$, Bull. Amer. Math. Soc. 75, 1969, p. 132-135.
- 45- GIDAS B. NI W.M., NIRENBERG L., Symmetry and related properties via the maximum principle, Comm. Math. Phys. 68, 1979, p. 209-243.
- 46- GUELFAND I.M., Some problems in the theory of quasilinear equations, Amer. Math. Soc. Transl. 29, 1963, p. 295-381.
- 47- GUILBARG D., TRUDINGER M.S., Elliptic partial differential equations, Springer Verlag, 1977.
- 48- GUYOT J., Etude mathématique et numérique d'un problème elliptique non linéaire avec points de retournement, Thèse Doct. Ing., Lyon, 1981.
- 49- HARAUX A., How to differentiate the projection on a convex set in Hilbert space, some applications to variational inequalities, J. Math. Soc. Japan 29, 1, 1977, p. 615-631.
- 50- HEINEMANN R.F. et al., Multiplicity and stability of premixed laminar flames : an application of bifurcation theory, Chem. Eng. Sci. 34, 1979, p. 833.
- 51- HESS P., On a second order nonlinear elliptic boundary value problem, Nonlinear Analysis, ed. L. Cesari et al., Acad. Press, 1978.
- 52- JOSEPH D.D., LUNDGREN T.S., Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources, Arch. Rat. Mech. Anal. 49, 1973, p. 241-269.
- 53- KATO T., Perturbation theory for linear operators, Springer Verlag, 1966.
- 54- KEENER J.P., KELLER H.B., Perturbed bifurcation theory, Arch. Rat. Mech. Anal 50, 1973, p. 159-175.

- 55- KELLER H.B., Some positive problems suggested by nonlinear heat generation, Bifurcation theory and nonlinear eigenvalue problems, ed. Keller J.B., Antman S., Benjamin, 1969, p. 217-255.
- 56- KELLER H.B., Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems, Applications of bifurcation theory, ed. Rabinowitz P.H., Ac. Press, 1977, p. 359-384.
- 57- KERNEVEZ J.P., Evolution et contrôle des systèmes bio-mathématiques, Thèse Univ. Paris VI, 1972.
- 58- KERNEVEZ J.P., THOMAS D., Numerical analysis and control of some biochemical systems, Appl. Maths. Opt. 1, 3, 1975, p. 222-285.
- 59- KINDERLEHRER D., STAMPACCHIA G., An introduction to variational inequalities, Ac. Press, 1980.
- 60- LAINE C., Etude mathématique et numérique de modèles de turbulence en conduite plane, Thèse Doct. Ing., Lyon, 1980.
- 61- LERAY J., SCHAUDER J., Topologie et équations fonctionnelles, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 3, 51, 1934, p. 45-78.
- 62- LEWY H., STAMPACCHIA G., On the regularity of the solution of a variational inequality, Comm. Pure Appl. Maths. XXIII, 1969, p. 153-188.
- 63- LIONS J.L., Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969.
- 64- LIONS P.L., On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations, Siam Review 24, 4, 1982, p. 441-467.
- 65- MARTIN D.H., The spectra of bounded linear self-adjoint operators relative to a cone in Hilbert space, Nonlinear Anal. 5, 3, 1981, p. 293-301.
- 66- MIGNOT F., Inéquations variationnelles et contrôle, Thèse Univ. Paris VI, 1975.
- 67- MIGNOT F., PUEL J.P., Sur une classe de problèmes non linéaires à non-linéarité positive, croissante, convexe, Congrès d'analyse non linéaire, Rome, 1978.
- 68- MIGNOT F., MURAT F., PUEL J.P., Variation d'un point de retournement par rapport au domaine, Lect. Notes in Math. N° 782, Springer, 1979.

- 69- MOORE G., SPENCE A., The calculation of turning points of non linear equations, Siam J. Numer. Anal. 17, 1980, p. 567.
- 70- NIRENBERG L., Topics in nonlinear analysis, Courant Institute, New-York Univ., 1974.
- 71- PASCAL P., Nouveau traité de chimie minérale, tome X, Masson, 1956.
- 72- RABINOWITZ P.H., Some global results for nonlinear eigenvalue problems, J. Funct. Anal. 7, 1971, p. 487-513.
- 73- RABINOWITZ P.H., Théorie du degré topologique et applications, Cours de 3^e cycle, Univ. Paris VI, 1975.
- 74- RICARD J., Cinétique et mécanismes d'actions des enzymes, Dion, Paris, 1973.
- 75- SATTINGER D.H., Topics in stability and bifurcation theory, Lect. Notes in Math. N° 309, Springer Verlag, 1973.
- 76- TEMAM R., Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionnaires, Ann. di Mat. Pura ed. Appl. LXXIX, 1968, p. 191-380.
- 77- VOSS H., Lower bounds for critical parameters in exothermic reactions, Bifurcation problems and their numerical solution, Birkhauser Verlag, 1980, p. 176-184.
- 78- WERNER B., Turning points of branches of positive solutions, Bifurcation problems and their numerical solution, Birkhauser Verlag, 1980.

NOM : CONRAD (avec précision du nom de jeune fille, le cas échéant) Prénoms : Francis		DATE de SOUTENANCE 24 Juin 1983
TITRE : PERTURBATION DE PROBLEMES AUX VALEURS PROPRES NON LINEAIRES ET PROBLEMES A FRONTIERE LIBRE		
NATURE :		Numéro d'ordre : 83-37
DOCT. d'UNIV. <input type="checkbox"/>	DOCTEUR- INGENIEUR <input type="checkbox"/>	DOCTORAT D'ETAT <input checked="" type="checkbox"/>
		DOCTORAT de 3e CYCLE <input type="checkbox"/> Spécialité :
Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis		CLASSE :
<p>RÉSUMÉ :</p> <p>Le travail porte sur l'étude de quelques familles de problèmes aux limites elliptiques non linéaires du second ordre, de la forme : $Au = f(\lambda, x, u, \varepsilon)$ où les réels positifs λ et ε qui apparaissent dans la non-linéarité f jouent, respectivement, le rôle de paramètre de bifurcation et de paramètre de perturbation.</p> <p>On s'est intéressé à l'aspect branches de solutions, retournements, pour $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon \rightarrow 0$ dans les cas suivants :</p> <p><u>Chapitre I</u> : un système <u>non linéaire couplé</u> modélisant un phénomène de diffusion avec réaction dans une membrane enzymatique</p> <p><u>Chapitre II</u> : une classe de problèmes pour lesquels $f(\lambda, x, t, \varepsilon)$ <u>converge régulièrement</u> lorsque ε tend vers 0 ; l'étude a porté sur la variation locale des points de retournement en fonction de ε ;</p> <p><u>Chapitre III</u> : un problème où $f(\lambda, x, t, \varepsilon)$ est une non-linéarité positive croissante convexe, mais <u>singulière</u> pour $\varepsilon \rightarrow 0$;</p> <p><u>Chapitre IV</u> : une classe de problèmes où $f(\lambda, x, t, \varepsilon)$ <u>converge vers une fonction discontinue</u> lorsque ε tend vers 0 ;</p> <p><u>Chapitre V</u> : des problèmes à <u>frontière libre</u> qui apparaissent comme limites lorsque ε tend vers 0, de modèles étudiés au chapitre IV et pour lesquels on fait une étude locale.</p>		
MOTS-CLES : Equations aux dérivées partielles elliptiques, Problèmes aux valeurs propres non linéaires, Problèmes à frontière libre, Points de retournement.		
Laboratoire (s) de recherches : Ecole des Mines de Saint-Etienne (Département Informatique) Ecole Centrale de Lyon (Département Mathématiques)		
Directeur de recherches : M. C. M. BRAUNER		
Président de jury : M. R. TEMAM		
Composition du jury : MM. J. B. BAILLON, J. BARANGER, C. M. BRAUNER, L. A. CAFFARELLI, C. CARASSO, B. NICOLAENKO.		

